Universität Freiburg, Abteilung für Mathematische Logik
Übung zur Vorlesung Modelltheorie 1, ws2014-2015
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Mohsen Khani

Blatt 1, Wiederholung

Nur nummerierte Aufgaben sind abzugeben.

Strukturen

Aufgabe. Seien $\mathcal{M}$,$\mathcal{N}$, L-Strukturen, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ($\mathcal{M}$ eine Substruktur von $\mathcal{N}$), $\bar{a} \in M$, und $\phi(\bar{x})$ ein quantorenfreie Formel. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$, genau dann, wenn $\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$.

Aufgabe. (Satz von Tarski) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ genau dann, wenn für alle $\phi(x, \bar{y}) \in L$ und $\bar{a} \in M$, gilt: $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \bar{a})$ genau dann, wenn es ein $c \in M$ gibt, so dass $\mathcal{N} \models \phi(c, \bar{a})$.

Definition. Seien $(I, <)$ eine Totalordnung und $\mathcal{M}_i$ eine L-Struktur für jedes $i \in I$. Wir sagen, dass $(M_i : i \in I)$ eine Kette von L-Strukturen ist, wenn $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j$ für alle $i < j$. Wir sagen, dass $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine elementare Kette ist, wenn $\mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$ für alle $i < j$.

Aufgabe.

1. Sei $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine Kette von L-Strukturen. Geben Sie eine L-Struktur $\mathcal{M}$ mit Grundmenge $\bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, so dass $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$ für alle i.

2. Sei $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ eine elementare Kette von L-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine elementare Erweiterung von jede $\mathcal{M}_i$ ist.

Aufgabe 1. Wir nehmen an, dass im folgenden Diagramm $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, L-Strukturen sind und dass f_1, f_2 elementare Abbildungen sind.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_1 & & \mathcal{M}_2 \\
& \mathcal{M}_0 \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"']
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass es eine L-Struktur $\mathcal{N}$ und elementare Abbildungen g_1 und g_2 gibt, so dass im folgenden Diagramm $g_2 \circ f_2 = g_1 \circ f_1$ gilt.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{N} & \\
\mathcal{M}_1 \arrow[ur, "g_1"] & & \mathcal{M}_2 \arrow[ul, "g_2"'] \\
& \mathcal{M}_0 \arrow[ul, "f_1"] \arrow[ur, "f_2"']
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Hinweis. Sei $\mathcal{N}$ eine $L(M)$-Struktur. Dann, $\mathcal{N}$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$ ist genau dann, wenn $N \models \mathrm{Diag}_{el}(\mathcal{M}) := \{\phi(m_1, \ldots, m_n) : \phi$ eine L- Formel ist und $\mathcal{M} \models \phi(m_1, \ldots, m_n)$.

Aufgabe. Ist der vorherige Aufgabe wahr, wenn man elementare Abbildungen mit L-Einbettungen ersetzt?

Definierbarkeit

Definition. Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur. Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ heißt (mit Parametern) definierbar, wenn es eine $m \in \mathbb{N}$, eine Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in L$, und $\bar{b} \in M^m$ gibt, sodass $X = \{\bar{a} \in M^n | \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}, \bar{b})\}$. Wenn $\bar{b} \in A^m$ (A eine Teilmenge von M), dann heißt X auch A-definierbar; oder wir sagen, dass X mit Parametern in A definierbar ist.

Aufgabe. Sei $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass die "Ordnung" in $\mathbb{Z}$ definierbar ist; das heißt, dass es eine Formel $\phi(x, y)$ gibt, sodass $\{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}, m < n\} = \{(m, n) : \mathcal{Z} \models \phi(m, n)\}$.

Aufgabe. Sei $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$. Wir nehmen an, dass $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine A-definierbare Menge ist. Zeigen Sie, dass der topologische Abschluss von X, auch A-definierbar ist.

Aufgabe 2. Seien $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $X \subseteq M^n$, A-definierbar. Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von $\mathcal{M}$, der A punktweise fest lässt, lässt X mengenweise fest (das heißt, wenn σ eine Automorphismus von M ist und für alle $a \in A$, $\sigma(a) = a$, dann $\sigma(X) = X$).

Aufgabe 3. Zeigen Sie (mit Hilfe der Aufgabe 2), dass $\mathbb{R}$ in $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ nicht definierbar ist.

Aufgabe. Ist $\{i\}$ in $\mathcal{C}$ (ohne Parameter) definierbar?

Aufgabe. Ist $\mathbb{Z}$ in $\mathcal{R}$ definierbar? Ist es in $\mathcal{C}$ definierbar?

Fakt. Wenn $X \subseteq \mathbb{C}$ in $\mathcal{C}$ definierbar ist, dann ist entweder X oder $\mathbb{C} - X$ endlich. Wenn $X \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathcal{R}$ definierbar ist, dann besteht X exakt aus endlich vielen von Punkten und Intervallen (den Beweis werden wir später sehen).

Vollständigkeitssatz

Bemerkung.

1. (der Gödelsche Vollständigkeitssatz) $T \models \phi$ genau dann, wenn $T \vdash \phi$.
2. (der Gödelsche Unvollständigkeitssatz) es gibt eine Aussage ϕ die in $(\mathbb{N}, +, ., 0, 1)$ wahr ist und nicht in PA beweisbar ist.
3. (Kompaktheitssatz) T ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche $T' \subseteq T$ erfüllbar ist.

4. (Satz von Löwenheim-Skolem) Eine Theorie T habe ein unendliche Modell, dann hat T Modelle in jeder unendlichen Kardinalität.

Aufgabe. Eine Totalordnung $(G, +, <)$ heißt archimedisch, wenn es für alle $x, z \in G$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, do dass $|x| < m|y|$. Zeigen Sie, dass es nicht-archimedische zu $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ elementare äquivalente Körper gibt.

Aufgabe 4.

1. Geben Sie die Axiome für torsionsfreie abelsche Gruppen.

2. Zeigen Sie, dass jede torsionsfreie abelsche Gruppe, geordnet werden kann (man kann eine total $<$ definieren, sodass $a+c < b+d$ für alle $a < b, c \leq d$).

Hinweis. Zeigen Sie es erst für der endlich erzeugte Fall.