Universität Freiburg, Abteilung für Mathematische Logik
Übung zur Vorlesung Modelltheorie 1, ws2014-2015
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Mohsen Khani

Blatt 2, Ultraprodukten

Nur nummerierte Aufgaben sind abzugeben.
Sei I eine Menge und $P(I) = \{X | X \subseteq I\}$. Ein **Filter** auf I ist eine Menge $D \subseteq P(I)$ mit den folgenden Eigenschaften

1. $I \in D$, $\emptyset \notin D$,
2. wenn $A, B \in D$, dann $A \cap B \in D$,
3. wenn $A \in D$ und $A \subseteq B \subseteq I$, dann $B \in D$.

D ist ein **Ultrafilter**, wenn für alle $X \subseteq I$ entweder $X \in D$ oder $I - X \in D$. Jeder Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden (Beweis mit Hilfe von Lemma von Zorn).
Seien

- L unsere Sprache,
- I eine unendliche Menge,
- für $i \in I$ sei M_i eine L-Struktur,
- $\prod_{i \in I} M_i = \{(a_i)_{i \in I} | a_i \in M_i\}$, und
- D ein Ultrafilter auf I.

Wir definieren: $(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \{i | a_i = b_i\} \in D$. Man rechtet nach, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Sei $M = \prod_{i \in I} M_i / \sim$. Im Folgenden finden wir eine L-Struktur $\mathcal{M}$ deren Grundmenge M ist. Wir nennen sie das Ultraprodukt von M_i (modulo D) und bezeichnen sie mit $\mathcal{M} = \prod_{i \in I}(M_i)/D$.

Interpretation der Konstanten Sei $c \in L$ eine Konstante. c ist in allen $\mathcal{M}_i$ als $c^{\mathcal{M}_i}$ interpretiert. Sei $c^{\mathcal{M}} = [(c_i^{\mathcal{M}_i})_{i \in I}]/\sim$.

Interpretation der Funktionen Sei $f(x_1, \ldots, x_n)$ ein Funktion-Zeichnen, das in $\mathcal{M}_i$ als $f^{\mathcal{M}_i}$ interpretiert ist ($i \in I$). Dann definieren wir:

$$f^{\mathcal{M}}\big([(a_{1i})_{i \in I}]/\sim, \ldots, [(a_{ni})_{i \in I}]/\sim\big) = [(b_i)_{i \in I}]/\sim \Leftrightarrow$$
$$\{i | f^{\mathcal{M}_i}(a_{1i}, \ldots, a_{ni}) = b_i\} \in D.$$

Interpretation der Relationen

$$R^{\mathcal{M}}([(a_{1i})_{i \in I}]/\sim, \ldots, [(a_{ni})_{i \in I}]/\sim) \Leftrightarrow$$
$$\{i | R^{\mathcal{M}_i}(a_{1i}, \ldots, a_{ni})\} \in D$$

Aufgabe (Satz von Łoś)**.** Für alle L-Formeln $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und $[(a_{1i})_{i\in I}]/\sim, \ldots, [(a_{ni})_{i\in I}]/\sim) \in M$:

$$\mathcal{M} \models \phi\big([(a_{1i})_{i\in I}]/\sim, \ldots, [(a_{ni})_{i\in I}]/\sim\big) \text{ genau dann, wenn}$$
$$\{i|\mathcal{M}_i \models \phi(a_{1i}, \ldots, a_{ni})\} \in D.$$

Aufgabe 1. Beweisen Sie den Kompaktheitsatz mit Hilfe der Ultraprodukten.

Hinweis. Nehmen wir an, dass T endlich erfüllbar ist. Sei

- $I = \{\Delta \subseteq T|\Delta \text{ endlich}\}$,
- für alle ϕ, sei $X_\phi = \{\Delta|\Delta \subseteq T, \Delta \text{ endlich }, \phi \in \Delta\}$,
- $D = \{X_\phi|\phi \in T\}$.

Man zeigt, dass

1. D hat die 'Finite Intersection Property' und ist daher in einem Ultrafilter U enthalten.
2. $\prod_{\Delta\in I} \mathcal{M}_\Delta/U \models T$, wobei $\mathcal{M}_\Delta \models \Delta$ für alle $\Delta \in I$.

Aufgabe 2. Für jede L-Struktur $\mathcal{A}$ definieren wir: $\mathrm{Th}(\mathcal{A}) = \{\phi|\phi \text{ eine Aussage und } \mathcal{A} \models \phi\}$. Sei C eine Klasse von L-Strukturen. Dann $\mathrm{Th(C)} := \bigcap_{\mathcal{A}\in C} \mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Zeigen Sie, dass für alle L-Strukturen $\mathcal{M}$:
$\mathcal{M} \models \mathrm{Th(C)}$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ elementar äquivalent zu einer Ultraprodukt der Elementen aus C ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass C eine elementare Klasse ist genau dann, wenn es unter Ultraprodukten und elementarer Äquivalenz geschlossen ist. ($\mathcal{C}$ heißt eine elementare Klasse, wenn es eine T gibt, so dass $\mathrm{C} = \{\mathcal{M}|\mathcal{M} \models T\}$).

Aufgabe 4. Sei C eine Klasse von endliche L-Strukturen, so dass für alle $n \in \omega$, $\{\mathcal{A} \in \mathrm{C} : |A| = n\}$ endlich ist. Sei $\mathrm{Th}_a(\mathrm{C}) := \{\phi| \text{ nur endliche viele } \mathcal{A} \in \mathrm{C} \text{ erfüllen } \phi \text{ nicht}\}$. Zeigen Sie folgendes

$\mathcal{M}$ ist eine unendliche Modell von Th(C) genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \mathrm{Th}_a(\mathrm{C})$.