«سادگی» به زبان ساده

محسن خانی

۱۴ مرداد ۱۳۹۵

فهرست مطالب

چکیده

در این یادداشت کوشیده‌ام یکی از مفاهیم مهم نظریه‌ی مدلی، یعنی ***سادگی*** را به ساده‌ترین زبان بازنمایم. تئوریهای ساده را نخستین بار شلاخ معرفی کرده است. خانواده‌ی تئوریهای ساده، خانواده‌ی بزرگی است که تئوریهای ثابت را نیز دربرمی‌گیرد. در تئوریهای ساده، رابطه‌ی ناوابستگی نافرکان رابطه‌ی خوشرفتاری است و ویژگیهای مهمی را از جمله «تقارن»، «تعدی»، «وجود» و «استقلال روی مدلها» داراست. از طرفی می‌توان نشان داد که اگر در تئوری‌ای رابطه‌ای داشته باشیم که همه‌ی این ویژگی‌ها را دارد، آن تئوری، ساده است و آن رابطه، دقیقاً رابطه‌ی ناوابستگی نافرکان است.

بیشترِ مطالب این نوشتار، از فصل هفتِ کتاب زیگلر و تنت آمده‌اند. پیش‌تر در کلاس درس نظریه‌ی مدل دوی زیگلر حاضر شده بودم و یادداشتهایی از آن تهیه کرده بودم که آنها نیز در وبگاه شخصیم گذاشته شده‌اند. این جزوه را در فراغت نوشته‌ام. در آن کوشیده‌ام همه‌ی قضیه‌ها را خودم اثبات کنم و آنها را تا ممکن است ساده بیان کنم. کوشیده‌ام مطالب را روان بنویسم و جزئی‌ترینها را نیز توضیح دهم که خواننده به آسودگی بحثها را دنبال کند. از تکرار، هیچ هراسی نداشته‌ام و همه‌چیز را تا جای ممکن ساده کرده‌ام.

امیدوارم این نوشتار، دستنامه‌ی مناسبی برای دانشجویان نظریه‌ی مدل باشد.

در سرتاسر این جُستار فرض کرده‌ایم که T یک تئوریِ کاملِ شمارا باشد و $\mathbb{M}$ مدل هیولای آن. وقتی T کامل است، همواره می‌توان فرض کرد که مدلی بسیار بزرگ مانند $\mathbb{M}$ دارد که به‌اندازه اشباع است، یعنی همه‌ی تایپها در آن برآورده می‌شوند. همچنین هر مدل دیگری مانند M و N که درباره‌اش بحثی شود، زیرمدلی مقدماتی از $\mathbb{M}$ است و هر مجموعه‌ای مانند A, B, C که به بحث بیاید، زیرمجموعه‌ای از این مدلِ هیولا است و هر عنصری مانند b در $\mathbb{M}$ است و هر چندتایی مانند $(b_1, \ldots, b_n)$ از عناصرِ $\mathbb{M}$ تشکیل شده است. هر تایپی نیز در مدل هیولا در نظر گرفته می‌شود، بی‌آنکه نامی از آن در نمادگذاری تایپ آمده باشد. یعنی به جای $\mathrm{tp}^{\mathbb{M}}(a/A)$ همواره خواهیم نوشت: $\mathrm{tp}(a/A)$.

در این نوشته، همانگونه که معمول در نظریه‌ی مدل است، میان عناصر و چندتاییها (چه متناهی و نامتناهی) فرقِ نمادی نگذاشته‌ایم: منظورمان از x و y چندتاییهایی از متغیرهاست که شاید نامتناهی باشند و منظورمان از b, c چندتاییهایی از پارامترهاست که نیز می‌توانند نامتناهی باشند.

نمادِ c $b \equiv_A$ یعنی که

$$\mathrm{tp}(b/A) = \mathrm{tp}(c/A). \quad (*)$$

با دانشی مقدماتی از نظریه‌ی مدل می‌توان نشان داد که $(*)$ وقتی و تنها وقتی روی می‌دهد که اتومرفیسمی از مدل هیولا داشته باشیم که A را نقطه‌وار حفظ کند و b را به c بفرستد. این مطلب را می‌توان با کمک یک سامانه‌ی رفت و برگشتی از ایزومرفیسمهای جزئی و با توجه به این که $\mathbb{M}$ به‌اندازه‌اشباع است، ثابت کرد.

۱ بخش شدن و فرکیدن

بحث را با تعریفِ بخش شدن [۱] و بیان برخی ویژگیهای آن می‌آغازم. تعریف بخش شدن تعریف نسبتاً پیچیده‌ای است و بهتر است پس از بیان آن، با اثبات کردن برخی ویژگیهای آن، با آن خو بگیریم.

تعریفِ ۱. فرض کنید $\phi(x,y)$ یک فرمول باشد و b یک پارامتر که قرار است به جای y بنشیند. هم‌چنین فرض کنید A مجموعه‌ای باشد از پارامترها. می‌گوییم $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی A kبخش می‌شود، هرگاه دنباله‌ای نامتناهی مانندِ

$$b_0, b_1, \ldots$$

از پارامترها پیدا شود که

$$b_i \equiv_A b \quad (\forall i);$$

و مجموعه‌ی زیر از فرمولها، kناسازگار [۲] باشد:

$$\{\phi(x,b_i) | i \in \omega\}.$$

به نقشِ k در تعریف بالا توجه داشته باشید. اگر چنین k ای موجود باشد، می‌گوییم فرمول مورد نظر روی A بخش می‌شود.

[۱] dividing

[۲] یعنی هر زیرمجموعه‌ی k عضوی از آن ناسازگار باشد.

بهتر است چند مشاهده‌ی ساده از مصادیق این تعریف داشته باشیم. بی‌درنگ از تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $\phi(x,b)$ خودْ ناسازگار باشد، روی هر مجموعه‌ای از پارامترها بخش می‌شود؛ زیرا که می‌توان همه‌ی b_i ها را برابر با b گرفت.

اگر b خودْ در A باشد، شرطِ $b_i \equiv_A b$ می‌گوید که همه‌ی b_i ها باید برابر با b باشند. بنابراین اگر $b \in A$ آنگاه فرمول $\phi(x,b)$ تنها در صورتی روی A بخش می‌شود که ناسازگار باشد.

از طرفی، عکس نقیض شرط تعریف (با کمک فشردگی) به ما می‌گوید که اگر $\phi(x,b)$ روی A بخش **نشود،** برای هر دنباله‌ی

$$b_0, b_2, \ldots$$

که در آن

$$b_i \equiv_A b \quad (\forall i)$$

مجموعه‌ی زیر از فرمولها سازگار است:

$$\{\phi(x,b_i) | i \in \omega\}.$$

اگر $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی A بخش شود، روی هر مجموعه‌ی کوچکتر مانند $A' \subseteq A$ نیز بخش می‌شود؛ زیرا که از $b_i \equiv_A b$ به آسانی می‌توان $b_i \equiv_{A'} b$ را نتیجه گرفت.

فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $b \equiv_A b'$. آنگاه $\phi(x,b')$ نیز روی A بخش می‌شود. علت آن روشن است: فرض کنید دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ شاهد بخش شدنِ $\phi(x,b)$ باشد (یعنی دنباله‌ای باشد که شرط تعریف بخش شدن را برآورده می‌کند). آنگاه $b_i \equiv_A b \equiv_A b'$. یعنی همین دنباله شاهد بخش شدنِ $\phi(x,b')$ نیز روی A است.

اگر $\phi_1(x,b_1)$ و $\phi_2(x,b_2)$ روی A بخش شوند، آنگاه $\phi(x,b_1) \wedge \phi(x,b_2)$ نیز روی A بخش می‌شود. اثبات این نکته چندان دشوار نیست ولی آن را کمی عقب می‌اندازیم و دیرتر بدان خواهیم پرداخت. گفتنی است که درباره‌ی $\phi_1(x,b_1) \vee \phi_2(x,b_2)$ این سخن درست نیست. یعنی شاید $\phi(x,b_1)$ و $\phi_2(x,b_2)$ هر دو روی A بخش شوند ولی فصلشان روی A بخش نشود. برای این نیز در صفحات بعدی مثالی خواهیم آورد. بخش نشدن فصل دو فرمول، انگیزه‌ی تعریفِ مفهوم جامعترِ «فُرکیدن» است. فرکیدن را در بخشهای بعدی تعریف کرده‌ایم.

تعریفِ ۲ (بخش شدن تایپها). فرض کنید $\pi(x)$ یک تایپ جزئی (یعنی مجموعه‌ای سازگار از فرمولهایی با پارامتر یا بدون پارامتر) باشد. می‌گوییم π روی A بخش می‌شود هرگاه π فرمولی مانند $\phi(x, b)$ را نتیجه دهد که این فرمول، روی A بخش می‌شود.

ادعا می‌کنیم که اگر تایپِ جزئیِ π روی A بخش شود، عطفی از فرمولهای آن روی A بخش می‌شود؛ یعنی فرمولهایی مانند $\phi_1(x, b), \ldots, \phi_n(x, b)$ همه در π، چنان پیدا می‌شوند که $\phi_1(x, b) \wedge \ldots \wedge \phi_n(x, b)$ روی A بخش شود. نخست توجه کنید که علت اینکه برای b ها اندیس نگذاشته‌ایم این است که فرض کرده‌ایم $b = (b_1, \ldots, b_n)$. اگر $\pi \models \phi(x, b)$ آنگاه زیرمجموعه‌ای متناهی از π هست که فرمولِ $\phi(x, b)$ را نتیجه داده است، و بنابراین عطفِ فرمولهای این زیرمجموعه‌ی متناهی مُراد ما خواهد بود.

پُرسشِ ۳. آیا همیشه می‌توان یک تایپ جزئی را که بخش نمی‌کند به تایپی کامل گسترش داد که بخش نشود؟ به بیان دقیق، فرض کنید π تایپی جزئی با مجموعه‌ی پارامترهای B باشد و π روی A (زیرمجموعه‌ای از B) بخش نشود. فرض کنید $\phi(x, b)$ فرمولی باشد که در آن $b \in B$. آیا می‌شود گفت که لزوماً یا $\pi \cup \{\phi(x, b)\}$ یا $\pi \cup \{\neg\phi(x, b)\}$ روی A بخش نمی‌شوند؟ (اگر این درست باشد، می‌شود یکی از ϕ یا $\neg\phi$ را به π افزود، و بدین روش سرانجام به تایپی کامل رسید).

گفتیم که تایپ جزئیِ π وقتی و فقط وقتی روی A بخش می‌شود که عطفی از فرمولهای آن روی A بخش شود. بنابراین یک تایپِ کاملِ $p \in S(B)$ روی A بخش می‌شود هرگاه فرمولی در آن مانند $\phi(x, b) \in S(B)$ پیدا شود که روی A بخش شود.

لمِ ۴. اگر تایپِ جزئیِ π در A برآورده شود، روی آن بخش نمی‌شود.

اثبات. فرض کنید $\phi(x, b) \in \pi$ و (b_i) دنباله‌ای باشد که $b_i \equiv_A b$. نیز فرض کنید $a \in A$ عنصری باشد که $\models \phi(a, b)$. از این که $b_i \equiv_A b$ و $\models \phi(a, b)$ و $a \in A$ نتیجه می‌شود که برای هر i داریم. $\models \phi(a, b_i)$. یعنی a مجموعه‌ی $\{\phi(x, b_i)\}$ را برآورده می‌کند.

$\square$

نمادگذاریِ ۵. فرض کنید $p \in S(B)$ یک تایپ کامل باشد و $A \subseteq B$؛ بنابراین در مدلِ هیولا عنصری مانندِ a داریم که $p = \operatorname{tp}(a/B)$. اگر p روی A بخش نشود، می‌نویسیم: $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{d}_{A} B$.

(حرف دیِ انگلیسی را به این خاطر گذاشته‌ایم که یادآور دیوادینگ یا همان بخش شدن باشد). به طور کلی‌تر، نمادِ $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\nolimits^d_A b$ یعنی $\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی A بخش نمی‌شود. به بیان دیگر، اگر بگیریم $p(x,y) := \mathrm{tp}(ab/A)$ آنگاه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}\nolimits_A b$ یعنی $p(x,b) := \{\phi(x,b)|\phi(x,y) \in \mathrm{tp}(ab/A)\}$ روی A بخش نمی‌شود.

مثال ۶. فرض کنید که p تایپی جهانی باشد؛ یعنی مجموعه‌ی پارامترهای آن، همه‌ی مدلِ هیولا باشد، یا به بیان دیگر $p \in S(\mathbb{M})$. فرض کنید که A مجموعه‌ای از پارامترها باشد. می‌گوییم تایپِ p تایپی Aناوردا است، هرگاه همه‌ی اتومرفیسمهای از $\mathbb{M}$ به $\mathbb{M}$ که A را نقطه‌وار حفظ می‌کنند، p را حفظ کنند. به بیان دیگر، اگر $\sigma \in Aut(\mathbb{M}/A)$ و $\phi(x,b) \in p$، آنگاه $\phi(x,\sigma(b)) \in A$. باز به بیان دیگر، اگر $\phi(x,b) \in p$ و $b \equiv_A c$ آنگاه $\phi(x,c) \in p$. همانگونه که گفتیم $b \equiv_A c$ معادل این است که اتومرفیسمی حافظِ نقطه‌وارِ A یافت شود که b را به c ببرد.

ادعا می‌کنیم که تایپِ جهانیِ روی A ناوردای p روی A بخش نمی‌شود. برای رسیدن به تناقض، فرض کنیم که p روی A بخش شود. بنا به تعریف، فرمولی مانند $\phi(x,b) \in p$ هست که روی A بخش می‌شود. توجه کنید که پارامترِ b پارامتری در مدل هیولا است. پس دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ پیدا می‌شود که در آن برای هر i داریم $b_i \equiv_A b$ و نیز این دنباله چنان است که $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ ناسازگار است. تناقض مورد نظر از آنجا حاصل می‌شود که $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ نمی‌تواند ناسازگار باشد: می‌دانیم که p تایپی کامل است. بنابراین $p = \mathrm{tp}(a/\mathbb{M})$ برای یک عنصرِ a که از مدل ابرهیولا بیاید! از طرفی می‌دانیم که برای هر $b_i \equiv_A b$ نیز $\phi(x,b_i) \in p$؛ یعنی $\models \phi(a,b_i)$. پس a برآورنده‌ای از کلِ $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ است. بنابراین هر زیرمجموعه‌ی متناهی از $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ در $\mathbb{M}$ برآورده شدنی است، و از این رو عنصری در $\mathbb{M}$ داریم که این مجموعه را برآورد.

مثال ۷. همین مثال برای فرکیدن هم کار می‌کند. لمِ ۳۳ را ببینید.

تعریفِ ۸. فرض کنید $\phi(x,b)$ یک فرمول باشد که در آن b پارامتری در مدل هیولاست. می‌گوییم این فرمول روی مجموعه‌ی A **می‌فُرکد** [۳] [۴] هرگاه فرمولهای $\phi_1(x,b_1),\dots,\phi_n(x,b_n)$ را داشته

[3] forks

[۴] یا بهتر بود فرکیدن را «شاخه‌شدن» یا «چنیدن» ترجمه می‌کردم. اما دور شدن از واژه‌ای که در ریاضی این چنین جاافتاده است چندان خردمندانه نمی‌نمود.

باشیم که

$$\phi(x,b) \models \phi_1(x,b_1) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b_n)$$

و هر $\phi_i(x,b_i)$ روی A بخش شود. به همین ترتیب یک مجموعه‌ی $\pi(x)$ از فرمولها روی یک مجموعه‌ی A می‌فرکد هرگاه فصلی متناهی از چند فرمول را نتیجه دهد که هر یک روی A بخش می‌شوند. نیز، یک تایپ کامل روی A می‌فرکد هرگاه فرمولی را شامل باشد که روی A بفرکد. نمادگذاری‌ای شبیه به نمادگذاری ۵ برای فرکیدن نیز داریم. در این جا از $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}$ استفاده می‌کنیم.

در بخشِ ۵ نمونه‌هایی از برابری بخش شدن و فرکیدن آورده‌ایم. در تئوریهای ساده، که موضوع اصلی این جستارند، نیز این برابری برقرار است. این مهم را در بخشهای آینده ثابت خواهیم کرد. در اینجا لم کوچکی درباره‌ی برابری بخش شدن و فرکیدن آورده‌ایم. همین لم را در بخشِ ۵ نیز بدون اثبات به یاد آورده‌ایم.

لمِ ۹. فرض کنید M یک مدل باشد و A زیرمجموعه‌ای از آن. فرض کنید بعلاوه که M مدلی $|A|^+$ اشباع باشد. آنگاه هر تایپ $p \in S(M)$ روی A بخش می‌شود اگروتنهااگر روی آن بفرکد. از این نتیجه می‌شود که اگر p تایپی جهانی باشد، آنگاه بخش شدن و فرکیدنِ آن روی یک مجموعه هم‌معنیند. به بیان دیگر، برای هر a و A داریم

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} \mathbb{M} \Leftrightarrow a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}_{A} \mathbb{M}.$$

اثبات. می‌دانیم که بخش شدن همیشه فرکیدن را نتیجه می‌دهد. بنابراین فرض می‌کنیم تایپ داده شده بفرکد و می‌خواهیم از آن نتیجه بگیریم که این تایپ همچنین بخش می‌شود. اگر p روی A بفرکد، فرمولهای $\phi_1(x,b),\ldots,\phi_n(x,b)$ پیدا می‌شوند که $p \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ و هر یک از $\phi_i(x,b)$ ها روی A بخش می‌شوند. پارامتر همه‌ی فرمولها را یکی گرفته‌ایم (زیرا می‌توان فرض کرد که $b = (b_1,\ldots,b_n)$). نخست یک مشاهده‌ی ساده داشته باشیم: اگر پارامترِ b در M باشد، آنگاه از آنجا که $p \in S(M)$ تایپی کامل است، از $p \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ نتیجه می‌شود که یکی از $\phi_i(x,b)$ ها در p است. زیراکه اگر هیچکدام در p نباشند، ازآنجاکه پارامترِ b در M است، نقیض هر یک در p خواهد بود، و در نتیجه عبارتِ $p \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ نمی‌تواند برقرار باشد. از این که یکی از ϕ_i ها در p است نتیجه می‌شود که p روی A بخش می‌شود.

پس فرض کنیم $b \not\in M$. از این که $p \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ نتیجه می‌شود که فرمولی مانند $\psi(x,m) \in p$ هست که $\psi\ (x,m) \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ و $m \in M$. از آنجا که M به اندازه‌ی $|A|^+$ اشباع است، تایپِ b روی Am در آن برآورده می‌شود. یعنی عنصرِ $b' \in M$ پیدا می‌شود که

$$b' \equiv_{Am} b.$$

همانطور که بعد از تعریف بخش شدن اشاره کردیم، هرگاه $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $b' \equiv_A b$ آنگاه به سادگی می‌توان دید که $\phi(x,b')$ نیز روی A بخش می‌شود. بنابراین هر $\phi_i(x,b')$ روی A بخش می‌شود. از اینجا به بعد، بحث مانند بندِ قبل دنبال می‌شود. □

لم پایین را برای بخش شدن ثابت کردیم و گفتیم برای فرکیدن نیز برقرار است:

لمِ ۱۰. اگر p تایپی جهانی و A ناوردا باشد، آنگاه p روی A نمی‌فرکد.

اثبات. لمِ ۳۳ نیز تکرارِ همین است: فرض کنید $q \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \phi_n(x,b)$ که هر کدام روی A بخش می‌شوند. از آنجا که q تایپی جهانی است باید یکی از ϕ_i ها در آن باشند. قبلاً نشان دادیم که یک تایپ ناوردا، بخش نمی‌شود، یعنی هیچکدام از ϕ_i ها نمی‌توانند بخش شوند. □

تا این جا ثابت کرده‌ایم که تایپهایی که ناوردا هستند و تایپهایی که در مجموعه‌ای برآورده می‌شوند، روی مجموعه‌ای که بر آن ناوردایند یا برآورده می‌شوند، نمی‌فرکند. این دو دسته از تایپها بسیار مهمند. نخست توجه کنید که اگر تایپی در مجموعه‌ای برآورده شود، روی آن ناوردا است. این را در ادامه‌ی بحث ثابت خواهیم کرد. نیز، تایپهایی که درمدلی برآورده می‌شوند، ایده‌ی تعریف شریک‌ارث‌اند. تایپهای شریک‌ارث آنهایند که در یک مدل، متناهیاً برآورده می‌شوند. در ادامه خواهیم دید که این تایپها نیز نمی‌فرکند.

در زیر لمی قوی‌تر را آورده‌ایم. تعریف لاسکار ناوردایی (که در لم زیر بدان اشاره شده است) در بخش ۷ آمده است. نیز برای فهمیدن اثبات این لم، نیاز به خواندن همان بخش هست. با این حال برای حفظ پیوستگی، از نوشتن اثبات این لم خودداری نکرده‌ایم.

لم ۱۱. اگر p تایپی جهانی و لاسکار ناوردا روی A باشد، آنگاه روی A نمی‌فرکد (گفتیم که فرکیدن و بخش شدن برای تایپهای جهانی هممعنیند).

در بخش ۷ ثابت خواهیم کرد که لاسکار ناوردایی، رابطه‌ای است هم‌ارزی و ناوردا که تعداد کلاسهای آن کراندار است. در واقع، لاسکار ناوردایی، اشتراک همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزیِ این‌چنین است. نیز نشان خواهیم داد که هر دو عنصری که عضو یک دنباله‌ی بازنشناختنی باشند، در کلاس یکسانی در یک‌چنین رابطه‌ای واقع می‌شوند. دیگر این که در بخشهای بعدی، نشان می‌دهیم که دنباله‌ی شاهد بخش شدن را می‌توان بازنشناختنی در نظر گرفت. نیز این مفهوم را تعریف خواهیم کرد. با دانستن این سه نکته، اثبات به صورت زیر ادامه می‌یابد.

اثبات. فرض کنید $p \vdash \phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ و هر کدام از ϕ_i ها روی A بخش شوند. یکی از ϕ_i باید در p باشد، زیرا p تایپی جهانی و کامل است. فرض می‌کنیم $\phi_1 \in p$. فرض کنید (b_i) دنباله‌ای بازنشناختنی و شاهد بخش شدنِ ϕ_1 باشد. در این صورت از این که $\phi_1(x, b_0) \in p$ بنا به توضیحی A که در بند پیش آمد، نتیجه می‌گیریم که برای هر i داریم $\phi_1(x, b_i) \in p$. یعنی $\{\phi_1(x, b_i)\}$ سازگار است؛ و البته این متناقض با بخش شدن است. $\square$

حقیقت ۱۲. فرض کنید $A \subseteq B$. آنگاه زیرمجموعه‌ی زیر از $S(B)$ باز است:

$$\{p \in S(B) | \text{روی } A \text{ می‌فرکد} \ p \}$$

یعنی اگر $p \in S(B)$ روی A بفرکد، آنگاه فرمولی مانند $\phi \in p$ داریم روی A می‌فرکد. پس هر تایپِ $q \in S(B)$ که شامل این فرمول باشد، روی A می‌فرکد. پس همسایگی بازِ $[\phi]$ از تایپِ p (که طبق تعریف، مجموعه‌ی همه‌ی تایپهای کامل است که ϕ را دربردارند) زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی یادشده در بالا است. به بیان دیگر زیرمجموعه‌ی زیر از $S(B)$ بسته است:

$$\{p \in S(B) | \text{روی } A \text{ نمی‌فرکد.} \ p \}$$

در بخشِ ۶ به ویژگیهای دیگری از فرکیدن و بخش شدن پرداخته‌ایم. در بخشهای آینده به جمع‌آوری معلوماتی خواهیم پرداخت که در ادامه بسیار کارگشا خواهند بود.

۲ دنباله‌های بازنشناختنی، لم استاندارد و لم شلاخ

دنباله‌های بازنشناختنی، دنباله‌هایی هستند که اعضاشان را بسته به ترتیب قرارگیریشان در دنباله، از هم نتوان بازنشاخت. به بیان دیگر، می‌گوییم دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی است هرگاه برای هر $i_1,\ldots,i_n \in \omega$ تایپِ $\text{tp}(a_{i_1},\ldots,a_{i_n})$ تنها به تایپ $i_1,\ldots,i_n$ در زبانِ $L = \{<,=\}$ در DLO بستگی داشته باشد. در زیر تعریف را دقیق‌تر بیان کرده‌ایم، ولی پیش از آن دو نکته را یادآور می‌شویم. نخست این که وقتی می‌گوییم «دنباله‌ی بازنشناختنی» منظورمان این نیست که دنباله را نمی‌توان بازشناخت. «دنباله‌ی بازنشناختنی» کوتاه‌شده‌ی عبارت طولانی‌ترِ «دنباله‌ای از اعضای ازهم‌بازشناخته‌نشدنی» است. این نکته برای عنوان انگلیسیِ این دنباله‌ها نیز صادق است. یادآوری دوم این است که مفهوم بازنشناختنی بودن را از دنباله‌ها به آرایه‌ها نیز گسترش داده‌اند. خواننده را برای آشنا شدن با آرایه‌های بازنشناختنی به یادداشت دیگری از خود تحت عنوان «یادداشتهای نظریه‌ی مدلی» در پیوند زیر ارجاع می‌دهم.

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/khani/NTP2freiburg.pdf

تعریفِ ۱۳. فرض کنید که $(I,<)$ یک ترتیب خطی باشد. فرض کنید $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای باشد که همان‌گونه که از نمادگذاری پیداست، مجموعه‌ی اندیس آن I است. همچنین فرض کنید که A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد. می‌گوییم دنباله‌ی $(a_i)_{i\in I}$ روی A دنباله‌ای **بازنشناختنی** است هرگاه همه‌ی شرایط زیر برقرار باشند:

$a_i \equiv_A a_0$ برای هر i،

$a_{i_0}a_{i1} \equiv_A a_0a_1$ برای هر $i_0 < i_1$،

$\vdots$

$a_{i_0}a_{i1}\ldots a_{in} \equiv_A a_0a_1\ldots a_n$ برای هر $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$،

$\vdots$

نخستین پرسشی که به ذهن می‌آید این است که آیا چنین دنباله‌هایی همیشه وجود دارند. پاسخ، بله است. برای هر تئوریِ دارای مدل هیولا، می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی در مدل هیولا پیدا کرد.

لم استاندارد، در زیر چیزی بیشتر می‌گوید. بنا بر این لم، همواره می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی پیدا کرد که اعضایش تایپ اهغن موستوفسکی یک دنباله‌ی دلخواه را برآورند. پیش از بیان لم استاندارد، مفهوم تایپِ «اهغن موستوفسکی» را معرفی می‌کنیم.

تعریفِ ۱۴ (تایپ اهغن موستوفسکی)**.** فرض کنید $(a_i)_{i\in I}$ یک دنباله باشد و A مجموعه‌ای باشد از پارامترها. **تایپ اهغن موتسوفسکیِ** $(a_i)_{i\in I}$ روی A که آن را با $EM\big((a_i)_{i\in I}/A\big)$ نشان می‌دهیم، تایپی است جزئی با متغیرهای $(x_i)_{i\in\omega}$ که ملاک شمول هر فرمول در آن به شرح زیر است:

- اگر $\phi(x_0,\ldots,x_n)$ یک فرمول باشد با پارامتر در A و داشته باشیم

$$\forall i_0 < i_2 \ldots < i_n \in I \quad \models \phi(a_{i_0},\ldots,a_{i_n})$$

آنگاه $\phi(x_0,\ldots,x_n) \in EM\big((a_i)_{i\in I}/A\big)$.

تایپِ اهغن موستوفسکی یک دنباله، لزوماً تایپی کامل نیست. می‌توان نشان داد که این تایپ تنها در صورتی کامل است که دنباله، بازنشناختنی باشد. لم استاندارد در زیر می‌گوید که همواره می‌توان دنباله‌ای بازنشناختنی پیدا کرد که تایپ اهغن موتسوفسکی یک دنباله‌ی داده شده را برآورد.

حقیقت ۱۵ (لِمِ استاندارد)**.** فرض کنید $(a_i)_{i\in I}$ یک دنباله باشد و A مجموعه‌ای باشد از پارامترها. آنگاه دنباله‌ای مانند $(b_j)_{j\omega}$ پیدا می‌شود که

۱. دنباله‌ی $(b_j)_{j\in\omega}$ روی A بازنشناختنی است.

۲. چندتاییِ $(b_j)_{j\in\omega}$ تایپِ جزئیِ $EM((a_i)_{i\in I}/A)$ را برآورده می‌کند.

پس بنا به این لم، اگر $(a_i)_{i\in I}$ یک دنباله باشد که در آن مجموعه‌ی اندیسِ $(I,<)$ یک ترتیب خطی است، و A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $(b_j)_{j\in\omega}$ پیدا می‌شود که

- $(b_j)_{j\in\omega}$ روی A بازنشاختنی است،
- هرگاه $\phi(x,y)$ یک فرمول تک‌متغیره باشد و $c\in A$ یک چندتایی از پارامترها باشد و برای هر $i\in I$ داشته باشیم $\models \phi(a_i,c)$، آنگاه داریم $\phi(b_0,c)$.

- هرگاه $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ فرمولی $n + 1$متغیره باشد و $c \in A$ مختصاتی از پارامترها، و برای هر $i_0 < \ldots < i_n \in I$ داشته باشیم $\models \phi(a_{i_0}, \ldots, a_{i_{n-1}}, c)$، آنگاه داریم $\models \phi(b_0, \ldots, b_n, c)$.

بیان معادل دیگری از این حقیقت، این است که اگر $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای به شرح فوق باشد و A نیز چنان باشد که در بالا گفته‌ایم و $c \in A$، آنگاه دنباله‌ای مانند $(b_j)_{j\in\omega}$ پیدا می‌شود که روی A بازنشناختنی و دارای این ویژگی است که اگر $\models \phi(b_0, \ldots, b_n, c)$ آنگاه $i_0 < \ldots < i_n \in I$ پیدا می‌شوند که $\phi(a_{i_0}, \ldots, a_{i_0})$.

علت بیان کردنم این حقیقت را به چند شیوه، این است که در به‌کارگیری لم استاندارد نیازمند دقتیم. در این لم اگر دنباله‌ای اولیه‌مان، $(a_i)_{i\in I}$، چنان باشد که در آن همه‌ی a_i ها تایپ یکسانی روی A داشته باشند، آنگاه دنباله‌ای (مانند (b_j)) به دست می‌آوریم که در آن برای هر $j \in \omega$ داریم $b_j \equiv_A a_i$؛ یعنی تایپ a_i ها حفظ می‌شود. ولی اگر a_i ها دارای تایپهای متفاوت باشد، برای «هر فرمول»، داریم $\phi(x) \in \mathrm{tp}(b_j)$ اگر و تنها اگر $\models \phi(a_i)$ برای هر i. یعنی در دنباله‌ی به دست آمده، تایپهای اعضا یکسانند ولی بوضوح برابر با تایپهای دنباله‌ی اولیه نیستند. همین گفته، برای تایپ‌های n متغیره نیز صادق است. پس هر ویژگی از نوع بازنشاختنی بودن **موضعی** (یعنی حول یک فرمول) که دنباله‌ی اولیه داشته باشد، دنباله‌ی دوم نیز خواهد داشت.

لم شلاخ، لم دیگری برای به دست آوردن دنباله‌های بازنشاختنی است. با اعمال این لم به دنباله‌ای می‌رسیم که تایپ هر عنصر آن در دنباله‌ی اول موجود است. ولی بهوش باید بود که شرط این لم این است که دنباله‌ی اولیه‌مان بسیار بزرگ باشد. پیش از بیان لم شلاخ، در زیر دو تکنیک پرکاربرد و البته معادل و نیز یک لم آسان را آورده‌ایم.

تکنیک ۱۶. فرض کنید $I = (a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد و b عنصری داده شده باشد. هیچ دلیلی نداریم که بگوید این دنباله، روی Ab بازنشناختنی است. ولی با کمک لم استاندارد می‌توان یک دنباله‌ی $I' \models EM(I/Ab)$ پیدا کرد که روی Ab بازنشناختنی است. جمله‌های دنباله‌ی I' با جمله‌های دنباله‌ی I متفاوتند ولی ازآنجاکه $EM(I/A) \subseteq EM(I/Ab)$ و از این که I روی A بازنشناختنی است، نتیجه می‌شود که $(b'_i)_{i\in\omega} \equiv_A (b_i)_{i\in\omega}$. فرض کنید σ اتومرفیسمی از مدل هیولا باشد که این هم‌ارزی را تضمین می‌کند. آنگاه $\sigma(I') = I$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی

$\sigma(Ab) = A\sigma(b)$ است. بنابراین برای هر b که به ما داده شده است، دنباله‌ی I روی A اجتماعِ یک کپی از b روی A بازنشناختنی است.

در تکنیک زیر نیز اساساً همان ایده‌ی تکنیک بالا را به کار گرفته‌ایم.

تکنیک ۱۷. فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش شود و $A \subseteq C$. آنگاه عنصری مانند $b' \equiv_A b$ یافت می‌شود که $\phi(x,b')$ روی C بخش شود.

اثبات. از این که $\phi(x,b)$ روی A بخش می‌شود نتیجه می‌شود که یک دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ I داریم که شامل b است و $\phi(x,I)$ ناسازگار است. فرض کنید $I' \models EM(I/C)$. آنگاه $I' \equiv_A I$ و I' روی C بازنشناختنی است. فرض کنید σ اتومرفیسم ضامنِ $I \equiv_A I'$ باشد؛ یعنی اتومرفیسمی که I را به I' می‌برد. آن را به کل وضعیت اعمال می‌کنیم: از این که $\phi(x,b)$ روی A بخش می‌شود و I ضامن آن است، نتیجه می‌شود که $\phi(x,\sigma(b))$ روی C بخش می‌شود و I' ضامن آن است. همچنین مشخص است که $b \equiv_A \sigma(b)$. می‌گیریم $b' = \sigma(b)$. □

در لم زیر بار دیگر همین ایده را به کار می‌گیریم.

لمِ ۱۸. فرض کنید I دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد. آنگاه یک مدلِ M شاملِ A داریم که I روی آن نیز بازنشناختنی است.

اثبات. فرض کنید M یک مدل دلخواه شاملِ A باشد و $(a'_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای باشد که

$$(a'_i)_{i\in\omega} \models EM((a_i)_{i\in\omega}/M).$$

بنابراین داریم

$$(a'_i)_{i\in\omega} \equiv_A (a_i)_{i\in\omega}$$

و نیز $(a'_i)_{i\in\omega}$ روی M بازنشناختنی است. توجه کنید که در رابطه‌ی $(a_i)_{i\in\omega} \equiv_A (a'_i)_{i\in\omega}$ دو طرف را چندتاییهای نامتناهی در نظر گرفته‌ایم، و این رابطه نتیجه می‌دهد که یک اتومرفیسم از مدل هیولا مانند σ هست روی A ناوردا است و $(a'_i)_{i\in\omega}$ را به $(a_i)_{i\in\omega}$ می‌برد. از آنجا که $(a'_i)_{i\in\omega}$ روی M بازنشناختنی است، $\sigma((a'_i)_{i\in\omega}) = (a_i)_{i\in\omega}$ روی $\sigma(M)$ بازنشناختنی است. نیز $\sigma(M)$ مدلی است شامل A. □

در لم استاندارد دیدیم که برای هر دنباله‌ی I و هر مجموعه‌ی پارامترِ A دنباله‌ای مانند J پیدا می‌شود که روی A بازنشناختنی است و $J \models EM(I/A)$. در لم شلاخ، که آن را در زیر آورده‌ایم، می‌بینیم که اگر دنباله‌ای باندازه‌بزرگ داشته باشیم، می‌توانیم دنباله‌ای بازنشناختنی از میان تایپهای آن بیرون بکشیم.

لمِ ۱۹ (لم شلاخ)**.** فرض کنید A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد. آنگاه یک کاردینالِ λ با ویژگی بیان شده در ادامه پیدا می‌شود: هرگاه $|I| = \lambda$ و $(a_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای دلخواه باشد، آنگاه دنباله‌ای مانند $(b_j)_{j\in\omega}$ یافت شود که

۱. $(b_j)_{j\in\omega}$ روی A بازنشناختنی است،

۲. برای هر $n \in \omega$ عناصرِ $i_0 < \ldots < i_n \in I$ چنان یافت می‌شوند که $b_0, \ldots, b_n \equiv_A a_{i0} \ldots a_{in}$.

پُرسشِ ۲۰. چه فرقی میان دنباله‌های بدست آمده از لم استاندارد و لم شلاخ هست؟

پُرسشِ ۲۱. آیا می‌توان در لم شلاخ گفت که دنباله‌ی بدست آمده‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ در واقع زیردنباله‌ای از دنباله‌ی اولیه‌ی $(a_i)_{i\in I}$ است؟

۳ دنباله‌های مُرلی با دو تعریف، دنباله‌های مُرلیِ اکید.

یکی از ابزارهای مهم در اثباتهامان، دنباله‌هایند که هر عنصرشان از اعضای پیشینشان مستقل است. این استقلال می‌تواند هر تعبیری داشته باشد و هر در تعبیر، دنباله را دنباله‌ای مُرلی از نوعِ آن تعبیر می‌خوانند. در اینجا تنها مقدماتی‌ترین این نوع دنباله‌ها را لازم داریم؛ یعنی دنباله‌های مُرلی را. در نوشتارگان، دنباله‌های مُرلی را با دو تعریف (به نوعی معادل) می‌شناسانند. در این بخش، هر دوی این تعریفها را آورده و نتیجه شدن یکی از دیگری را ثابت کرده‌ایم. نیز نشان خواهیم داد که برای تئوریهای ساده، بخش نکردن را کافی است را تنها با یک دنباله‌ی مُرلی آزمود. پس از آن دنباله‌های مُرلی اکید را باختصار معرفی می‌کنیم و بدین اشاره می‌کنیم که آنها در بخش شدن در تئوریهای نیپ، نقش دنباله‌های مُرلی در بخش شدن در تئوریهای ساده را بازی می‌کنند.

تعریفِ ۲۲. فرض کنید که p تایپی جهانی باشد و A یک مجموعه‌ی پارامتر. می‌گوییم دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای مُرلی در p روی A است، هرگاه شماره‌های زیر با هم روی دهند:

۱. هر کدام از a_i ها تایپِ p را برآورد؛ یعنی (در نمادگذاری ما)

$$a_i \models p.$$

۲. دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ روی A بازنشناختنی باشد.

۳. برای هر $i > 0$ داشته‌باشیم

$$a_i \underset{A}{\overset{f}{\perp}} \{a_0, \ldots, a_{i-1}\}.$$

طبیعی است از خود بپرسیم که آیا در یک تایپِ جهانی، همیشه یک دنباله‌ی مُرلی پیدا می‌شود یا خیر. پاسخ این سوال برای تایپهای جهانی شریک ارث مثبت است. شریک بودن در ارث نیز نوعی استقلال در گسترش تایپهاست که استقلال نافرکان را نتیجه می‌دهد. درباره‌ی شریک‌ارث در بخش ۴ به تفصیل نوشته‌ایم. لم زیر چیزی کلی تر از این می‌گوید. با توجه به لم زیر، هرگاه q تایپی جهانی و Aناوردا باشد، آنگاه در آن یک دنباله‌ی مُرلی پیدا می‌شود. در لمِ ۳۲ ثابت کرده‌ایم که که هرگاه تایپی در A هر بخش متناهیش برآورده شود، آنگاه آن تایپ روی A ناورداست. (بعداً خواهیم دید که در تئوریهای ساده، در هر تایپی می‌توان دنباله مُرلی پیدا کرد، قضیه‌ی ۶۹. نیز در تئوریهای نیپ در هر تایپی می‌توان دنباله‌ای اکیداً مُرلی پیدا کرد.)

لمِ ۲۳. فرض کنید q یک تایپ جهانیِ ناوردا روی A باشد. دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ را به گونه‌ای بسازید که شرطهای زیر را برآورد:

- $b_0 \models q|_A$
- $b_1 \models q|_{Ab_0}$
- $\ldots$
- $b_n \models q|_{Ab_0\ldots b_{n-1}}$.

- ...

آنگاه دنباله‌ی یادشده، روی A در q مُرلی است.

اثبات. دو چیز را باید ثابت کرد. نخست این که این دنباله روی A بازنشناختنی است، و دیگر این که برای هر i داریم $b_i \downarrow^f_A b_0 \dots b_{i-1}$.

نخست توجه کنید که همه‌ی b_i ها روی A همتایپند. زیرا برای هر i بنا به فرض $b_i \models q|_A$. یعنی $\mathrm{tp}(b_i/A) = q|_A$. حال با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر $i_0 < \dots < i_n$ داریم $\mathrm{tp}(b_{i_0} \dots b_{in}/A) = \mathrm{tp}(b_0 \dots b_n/A)$. فرض استقراء این است که برای هر $i_0 < \dots < i_{n-1}$ داریم $b_{i_0} \dots b_{i_{n-1}} \equiv_A b_0, \dots, b_{n-1}$. فرض کنید σ اتومرفیمسی باشد که این رابطه را تضمین کند. آن را به $b_{i0} \dots b_{i_n}$ اعمال می‌کنیم:

$$b_{i_0} \dots b_{i_n} \equiv_A b_0 \dots b_{n-1}\sigma(b_{i_n}).$$

تنها چیزی که مانده است نشان دهیم این است که

$$b_0 \dots b_{n-1}\sigma(b_{i_n}) \equiv_A b_0 \dots b_{n-1}b_n.$$

برای این منظور باید نشان داد که

$$\mathrm{tp}(\sigma(b_{i_n})/b_0 \dots b_{n-1}A) = \mathrm{tp}(b_n/b_0, \dots, b_{n-1}A).$$

داریم $\mathrm{tp}(b_{i_n})/b_0, \dots, b_{n-1}A) = \mathrm{tp}(b_n/b_0, \dots, b_{n-1}A)$. زیرا، اگر به فرض $i_n > n$ آن گاه b_{i_n} تایپ $q|_{Ab_0 \dots b_{i_n}-1}$ را برمی‌آورد. پس محدودشده‌ی این تایپ به $b_0 \dots b_{n-1}$ را نیز برمی‌آورد. این تحدید را بنا به فرض b_n نیز برمی‌آورد.

از طرفی q تحت σ ناوردا است. بنابراین $q|_{b_0 \dots b_{n-1}} = \sigma(q)|_{b_0, \dots b_{n-1}}$. و این، آنچه را که می‌خواهیم نتیجه می‌دهد.

دومین چیزی که می‌خواهیم نشان دهیم این است که دنباله‌ی یاد شده، مستقل است. یعنی $\mathrm{tp}(b_i/Ab_0 \dots b_{i-1})$ روی A نمی‌فرکد. داریم $\mathrm{tp}(b_i/Ab_0 \dots b_{i-1}) = q|_{Ab_0 \dots b_{i-1}}$ و بنا به فرضمان، q روی A ناوردا است. در لمِ ۳۳ ثابت خواهیم کرد که اگر یک تایپ جهانی، A ناوردا باشد، روی A نمی‌فرکد. $\square$

روند بالا را به‌گونه‌ی مشابهی با «ضرب تایپها» تکرار می‌کنیم.

تعریفِ ۲۴. فرض کنید $p(x)$ و $q(y)$ دو تایپ جهانی باشند، فرضاً $p = \mathrm{tp}(a/\mathbb{M})$ و $q = \mathrm{tp}(b/\mathbb{M})$ که در آن a و b از مدل ابرهیولا آمده‌اند. همچنین فرض کنید هر دوی این تایپها روی یک مجموعه‌ی A ناوردا باشند. تایپِ $p(x) \otimes q(y)$ تایپی جهانی با دو متغیرِ x و y است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(c,d) \models p(x) \otimes q(y) \Leftrightarrow (d \models q(y)) \text{ و } (c \models p \restriction_{\mathbb{M}d}).$$

در تعریف بالا از مدل هیولا در نمایش تایپها استفاده کرده‌ایم. عموماً بهتر است از این کار اجتناب کرد، زیرا مدل هیولا قرار است شامل همه‌چیز باشد و سخن گفتن از مدل ابرهیولا چندان زیبا به نظر نمی‌رسد. نظر به این، تعریف بالا را می‌توان به صورت ساده‌ترِ زیر نیز نوشت. همچنان فرض کنید که $p(x)$ و $q(y)$ دو تایپ جهانی و ناوردا روی A باشند. تایپِ $p(x) \otimes q(y)$ تایپی جهانی است که تحدید آن به هر مجموعه‌ی D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(c,d) \models p(x) \otimes q(y) \restriction_D \Leftrightarrow (d \models q(y) \restriction_D) \text{ و } (c \models p \restriction_{Dd}).$$

چند نکته را درباره‌ی ضرب دو تایپ بدون اثبات یادآور می‌شوم: نخست این که ضرب دو تایپ لزوماً جابه‌جایی نیست. بررسی اینکه چه زمانی این ضرب جابه‌جایی است خود موضوع تحقیق است. مثلا اگر q شریک ارث باشد (یعنی در یک مدل M هر تعداد متناهی فرمول از آن برآورده شود) این ضرب جابجایی است.

همچنین حاصل‌ضرب دو تایپ روی A ناوردا، خود نیز روی A ناوردا است.

اما نکته‌ی از همه مهم‌تر این است که وقتی (c,d) برآورنده‌ای از تایپ $p(x) \otimes q(y)$ باشد، آنگاه d به نوعی از c مستقل است. این نکته اساسا همان است که در لم ۲۳ ثابت کرده‌ایم. پیش از ادامه‌ی کار تعریف دوم دنباله‌های مرلی را در نظر می‌گیریم.

تعریفِ ۲۵. دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ را دنباله‌ای مُرلی روی A در تایپِ جهانیِ روی A ناوردای p می‌خوانیم هرگاه

$$(a_i)_{i\in\omega} \models p^{(\omega)}(x_i)_{i\in\omega}|_A.$$

تایپ $p^{(\omega)}$ که متغیرهای آن $(x_i)_{i\in\omega}$ هستند، از حد گرفتن از $p^n = \underbrace{p\otimes p\ldots}_{n \text{ بار}}$ به دست می‌آید.

تعریف ۲۵ بنا به لم ۲۳ تعریف ۲۴ را به دست می‌دهد. نیز توجه کنید که در تئوریهای نیپ می‌توان تایپهای جهانی را با کمک دنباله‌های مرلیشان شناساند. به بیان دیگر اگر p و q دو تایپ جهانی A ناوردا باشند و $p^{(\omega)}|_A = q^{(\omega)}|_A$ آنگاه $p = q$.

در زیر تعریف دنباله‌های مُرلی اکید (یا دنباله‌های نافرک اکید) را آورده‌ایم. این تعریف با ادامه‌ی بحثمان درباره‌ی تئوریهای ساده بی‌ارتباط است و خواننده می‌تواند از خواندن آن خودداری کند. نیز در لم ۲۹ به تشابه نقشهای دنباله‌های مرلی اکید در تئوریهای نیپ و دنباله‌های مرلی در تئوریهای ساده اشاره کرده‌ایم.

تعریفِ ۲۶. تایپ $p = \mathrm{tp}(a/B)$ را روی A اکیداًنافرکان می‌خوانیم هرگاه دارای گسترش جهانی مانند $\mathrm{tp}(a^*/\mathbb{M})$ باشد به طوری که $\mathbb{M} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^f_A a^*$ و $a^* \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^f_A \mathbb{M}$. به بیان دیگر، هرگاه $A \subseteq B$ می‌گوییم $p \in S(B)$ روی A اکیداً نافرکان است هرگاه p دارای یک گسترش جهانیِ p' باشد، به‌طوری‌که برای هر $C \supseteq B$ و هر $a' \models p'|_C$ داشته باشیم $a' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^f_A C$. نیز، می‌گوییم a و b استقلال اکیداً نافرکان روی A دارند و می‌نویسیم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{st}_A b$ هرگاه $\mathrm{tp}(a/Ab)$ توسیعی اکیداً نافرکان از $\mathrm{tp}(a/A)$ باشد. دنباله‌ی $(a_i)_{i\in\omega}$ را اکیداًمُرلی می‌خوانیم هرگاه نسبت به $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{st}$ مُرلی باشد.

حقیقت ۲۷.
- اگر T یک تئوری ساده باشد و p تایپی جهانی و شریک ارث، آنگاه یک دنباله‌ی مُرلی در p پیدا می‌شود.
- فرض کنید $b \in \mathbb{M}$ و $M \models T$ و T یک تئوریِ نیپ باشد. آنگاه یک دنباله‌ی نافرک اکیدِ $b = b_0b_1,\ldots$ روی M پیدا می‌شود. به این دنباله، یک دنباله‌ی مرلی اکید در تایپ $\mathrm{tp}(b/M)$ می‌گویند.

پُرسشِ ۲۸. آیا حقیقت بالا درباره‌ی تئوریهای ان‌تی‌پی‌دو نیز برقرار است؟

دنباله‌های مُرلی اکید در تئوریهای نیپ، نقشی شبیه به نقش دنباله‌های مُرلی درتئوریهای ساده بازی می‌کنند. به لم زیر توجه کنید. قسمت اول این لم را که درباره‌ی دنباله‌های مرلی در تئوریهای ساده است، در ادامه‌ی این جُستار ثابت کرده‌ایم.

لمِ ۲۹. ۱. فرض کنید T ساده باشد. فرمول $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی A بخش می‌شود، اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی مُرلیِ شامل b مانند I، مجموعه‌ی $\phi(x,I)$ ناسازگار باشد (بنابراین برای بخش نشدن، یافتن تنها یک دنباله‌ی مُرلی شاهد کافی است.)

۲. فرض کنید T نیپ باشد. آنگاه فرمول $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی A بخش می‌شود اگر وتنها اگر برای هر دنباله‌ی مُرلی اکید I که b را در بر داشته باشد، مجموعه‌ی $\phi(x,I)$ ناسازگار باشد (پس برای بخش نشدن در تئوریهای نیپ یافتن یک شاهد مرلی اکید کافی است).

۴ تایپهای ناوردا، تایپهای متناهی‌برآورده‌شدنی، شریک ارث

پیش از این درباره‌ی شریک‌ارث بسیار گفته‌ایم بی‌آن‌که آن را تعریف کرده باشیم. وقت آن است که تعریف مختصری از شریک‌ارث در زیر ارائه کنیم. تایپ جهانی $p \in S(\mathbb{M})$ را شریک‌ارث روی مدل M می‌خوانیم هرگاه هر فرمول در آن توسط عنصری از مدلِ M برآورده شود:

$$\forall \phi(x,a) \in p \quad \exists m \in M \quad \models \phi(m,a).$$

چند مشاهده‌ی مهم را درباره‌ی شریک‌ارث در زیر آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۳۰. ۱. هر تایپی روی یک مدلِ M دارای شریک‌ارث است. یعنی هر تایپ $p \in S(M)$ را می‌توان به یک تایپ جهانیِ $p \in S(\mathbb{M})$ گستراند که شریک ارث روی M باشد.

۲. اگر p روی M شریک‌ارث باشد، روی M ناورداست.

۳. اگر p روی M شریک ارث باشد، روی آن نمی‌فرکد؛ یعنی

$$a \underset{M}{\overset{\text{شریک‌ارث}}{\downarrow}} b \Rightarrow a \underset{M}{\overset{f}{\downarrow}} b$$

که در بالا $a \overset{\text{شریک‌ارث}}{\downarrow} b$ یعنی $\mathrm{tp}(a/bM)$ شریک‌ارثی از تایپ $\mathrm{tp}(a/M)$ است؛ یعنی هر فرمول در آن را عنصری در M برآورده می‌کند.

اثبات. اثبات مورد اول. راه استاندارد اثبات مورد اول، استفاده از روش برقراری ارتباط میان مفهوم تایپ و مفهوم فیلتر است. فرض کنید $p \in S(M)$ تایپی داده شده باشد. مجموعه‌ی F تعریف شده در زیر، پایه‌ی یک فیلتر از زیرمجموعه‌های M است:

$$F := \{\phi(M,a) | \phi(x,a) \in p\}.$$

منظور از پایه‌ی فیلتر، گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های M است که ویژگیهای زیر را داراست:

- این گردایه ناتهی است؛
- اشتراک هر دو مجموعه در این گردایه، باز در این گردایه است.
- مجموعه‌ی تهی در این گردایه نیست.

بنابراین می‌توان فیلتر تولید شده به وسیله‌ی این پایه‌ی فیلتر را در نظر گرفت و نیز آن را به یک فرافیلتر گستراند. فرض کنید $\mathcal{F}$ فرافیلتری باشد که از این راه حاصل شده است. حال تایپ جهانی p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(x,a) \in p \Leftrightarrow \phi(M,a) \in \mathcal{F}$$

برای هر $a \in \mathbb{M}$.

نخست باید توجیهی بیابیم که تایپ تعریف شده در بالا واقعا تایپی جهانی است. اولاً مجموعه‌ی تعریف شده در بالا سازگار است؛ زیرا اگر $\phi(x,a_1), \dots \phi(x,a_n)$ در آن باشند آنگاه $\phi(M,a_i) \in \mathcal{F}$. در نتیجه $\bigcap \phi(M,a_i) \in \mathcal{F}$. در نتیجه $\bigcap \phi(M,a_i) \neq \emptyset$. ثانیاً برای هر فرمولِ $\phi(x,a)$ اگر $\phi(x,a) \notin p$ آنگاه $\phi(M,a) \notin \mathcal{U}$ در نتیجه‌ی $\phi(M,a)^c \in \mathcal{U}$ یعنی $\neg\phi(x,a) \in p$.

حال باید نشان دهیم که p شریک‌ارث است؛ یعنی اگر $\phi(x,a) \in p$ آنگاه

$$\exists m \in M \quad \models \phi(m,a).$$

این نیز روشن است. اگر $\phi(x,a) \in p$ آنگاه $\phi(M,a) \in \mathcal{U}$ و بنابراین $\phi(M,a) \neq \emptyset$. همان‌گونه که در بالا نیز گفتم، این روش برای یافتن شریک‌ارث، روشی استاندارد است.

اثبات مورد دوم: در لم ۳۲ نشان می‌دهیم که اگر تایپی روی یک مجموعه متناهیاً برآورده شود، روی آن ناورداست. نیز در لم ۳۳ نشان داده‌ایم که تایپی روی مجموعه‌ای ناوردا باشد، روی آن نمی‌فرکد. □

در مورد اول در قضیه‌ی بالا گفتیم که هر تایپی دارای شریک‌ارث است. در حقیقت، تعداد شریک‌ارثهای متفاوت برای یک تایپ، خودْ موضوع تحقیق است. گاهی می‌شود تئوریها را بر اساس تعداد شریک‌ارثهای مدلهاشان طبقه‌بندی کرد. در گزاره‌ی زیر دو مصداق این سخن را بدون اثبات آورده‌ایم.

گزاره‌ی ۳۱.

تئوریِ T ثابت است اگر و تنها اگر هر تایپِ $p \in S(M)$ در آن دارای شریک‌ارثی یکتا باشد.

تئوریِ T نیپ است اگر و تنها اگر هر تایپِ $p \in S(M)$ در آن دارای حداکثر $2^{|M|+|T|}$ شریک‌ارث باشد.

لمِ ۳۲. اگر p تایپی جهانی باشد که در A هر بخش متناهیش برآورده می‌شود، آنگاه p روی A ناوردا است.

اثبات. فرض کنید $\phi(x,b) \in p$ و $b \equiv_A b'$. می‌خواهیم داشته باشیم $\phi(x,b') \in p$. اگر چنین نباشد، آنگاه $\neg\phi(x,b') \in p$. بنابراین عنصری در A داریم مانند a که $\models \neg\phi(a,b') \wedge \phi(a,b)$. از آنجا که $b' \equiv_A b$ نتیجه می‌گیریم که $\models \neg\phi(a,b)$ و این تناقض است. □

لمِ ۳۳.

- اگر q یک تایپ جهانی ناوردا روی A باشد روی آن نمی‌فرکد.
- اگر q تایپی باشد که هر بخش متناهیش روی A برآورده می‌شود آنگاه q روی A نمی‌فرکد.
- بنابراین اگر q شریک ارثی از تایپ p روی یک مدل M باشد،آنگاه q توسیعی نافرکان از p است.

اثبات. اثبات دومی را قبلا نوشته‌ایم. در این جا اولی را فقط ثابت می‌کنیم. فرض کنید $q \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)$ که هر کدام روی A بخش می‌شوند. از آنجا که q تایپی جهانی

است باید یکی از ϕ_i ها در آن باشند. قبلاً نشان دادیم که یک تایپ ناوردا، بخش نمی‌شود، یعنی هیچکدام از ϕ_i ها نمی‌توانند بخش شوند. $\square$

مشاهده ۳۴ (ویژگی مهمی از شریک ارث)**.** فرض کنید q شریک ارثی برای $q|_M$ باشد. یعنی هر بخش متناهی از q در M برآورده شود. اگر b عنصری در مدل هیولا باشد و $\phi(x,b)$ فرمولی در q، آنگاه اگر برای هر $a \in M$ داشته باشیم $\models \phi(a,b)$ آنگاه داریم $\phi(x,b) \in q$. زیرا که در غیر این صورت، $\neg\phi(x,b) \in q$ و از آن جا که q در M هر بخش متناهیش برآورده می‌شود، عنصری در M خواهیم داشت که $\neg\phi(x,b) \in q$ را برآورد، و این خلاف فرضمان است.

۵ برابری فرکیدن و بخش شدن

در برخی تئوریها فرکیدن و بخش شدن با هم معادلند. تئوریهای ساده و ثابت از این دست هستند. در برخی دیگر از تئوریها، مفهوم فرکیدن و بخش شدن تنها بر روی مدل‌ها با هم هم‌ارزند. تئوریهای ان‌تی‌پی‌دو و تئوریهای ان‌آی‌پی چنیند.

در این نوشته (و در بخشهای آینده) تنها برابری فرکیدن و بخش شدن برای تئوریهای ساده نشان داده شده است.

حقیقت ۳۵. اگر T یک تئوری نیپ باشد و M مدلی از آن، آنگاه تایپِ جزئیِ $\pi(x)$ روی M بخش می‌شود اگر و تنها اگر روی آن بفرکد.

حقیقت ۳۶. اگر T ساده باشد و A یک مجموعه‌ی پارامتر، آنگاه تایپ جزئیِ $\pi(x)$ روی A بخش می‌شود اگر و تنها اگر بر آن بفرکد.

در زیر لمِ ۹ را به یاد آورده‌ایم که می‌گفت که برای تایپهای تعریف‌شده روی یک مدل اشباع، بخش شدن و فرکیدن معادلند.

لمِ ۳۷. فرض کنید M یک مدل باشد و $A \subseteq M$ و نیز فرض کنید M مدلی $|A|^+$ اشباع باشد. آنگاه $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^d_A a$ اگر و تنها اگر $M \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\nolimits^f_A a$. یعنی هر تایپِ $p \in S(M)$ روی A بخش می‌شود اگر

وتنها اگر روی آن بفرکد. (از این نتیجه می‌شود که اگر p تایپی جهانی باشد، آنگاه بخش شدن و فرکیدن آن روی یک مجموعه هم‌معنیند. به بیان دیگر، برای هر a و A داریم

$$a \underset{A}{\overset{d}{\downarrow}} \mathbb{M} \Leftrightarrow a \underset{A}{\overset{f}{\downarrow}} \mathbb{M}.)$$

۶ چند ملاک برای بخش شدن و چند ویژگیِ بخش شدن و فرکیدن

عموماً بخش شدن را با تعریف مستقیم آن نمی‌آزمایند. حال که با دنباله‌های بازنشناختنی و دنباله‌های مُرلی آشنا شده‌ایم می‌توانیم ملاکهای ساده‌تری برای بخش شدن و فرکیدن ارائه دهیم.

لمِ ۳۸. فرمول $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی پارامترِ A اگروتنهااگر بخش می‌شود که یک دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ پیدا شود که

- $(b_i)_{i\in\omega}$ روی A بازنشناختنی باشد.
- $b_0=b$.
- مجموعه فرمولِ $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ ناسازگار باشد.

به چند نکته در لم بالا توجه کنید: نخست این که گفته‌ایم دنباله‌ای که بخش شدن را شاهد است بازنشناختنی باشد. دوم این که این دنباله می‌تواند با b شروع شود. سوم اینکه بر خلاف تعریف اصلی، نگفته‌ایم که عددی مانند k نیز موجود باشد که دنباله‌مان kناسازگار باشد (بدیهی است که چنین عددی موجود است).

بد نیست عکس نقیض تعریف بالا را هم بنویسیم. فرمولِ $\phi(x,b)$ روی A اگروتنهااگر بخش **نمی‌شود** که برای هر دنباله‌ی روی A بازنشناختنی آغازشونده با b مانند $b=b_0,b_1,\ldots$ تایپ جزئیِ $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار باشد.

اثباتِ لمِ ۳۸. فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش شود. آنگاه بنا به تعریفِ بخش شدن، دنباله‌ای مانند $(b_i)_{i\in\omega}$ پیدا می‌شود که برای هر i داریم $b_i\equiv_A b$ و نیز عددی مانند k پیدا می‌شود که

$\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ یک تایپِ جزئیِ kناسازگار باشد. همان طور که در بخش قبل دیدیم، برای جایگزین کردنِ دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ با یک دنباله‌ی بازنشناختنی، همیشه می‌توان از لم استاندارد استفاده کرد. بنا به این لم، دنباله‌ای بازنشناختنی روی A مانندِ $(b'_i)_{i\in\omega}$ پیدا می‌شود که

$$(b'_i)_{i\in\omega} \models EM((b_i)_{i\in\omega}/A).$$

می‌دانیم که دنباله‌ی اولیه‌مان، $(b_i)_{i\in\omega}$، دارای این ویژگی است که برای هر i داریم $b_i \equiv_A b$. پس بنا به تعریف تایپ اهغن موستوفسکی، این ویژگی به تایپِ اهغن موستوفسکی آن منتقل می‌شود. یعنی در دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\omega}$ داریم

$$b'_i \equiv_A b \quad \forall i \in \omega.$$

نیز باید نشان داد که $\{\phi(x,b'_i)\}_{i\in\omega}$ ناسازگار است. برای اثبات این گفته، هم به ویژگیهای تایپ اهغن موستوفسکی نیاز داریم و هم به این نکته که عددی مانند k داریم که $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ یک تایپ جزئیِ k ناسازگار است. یعنی برای هر $i_1 < \ldots < i_k$ داریم

$$\forall x \neg[\phi(x,b_{i1}), \ldots \phi(x,b_{i_k})].$$

پس این ویژگی (به گونه‌ای که در بالا نوشته شده است) نیز وارد تایپ اهغن موستوفسکی می‌شود. یعنی در دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\omega}$ نیز برای هر $i_1 < \ldots < i_k$ مجموعه‌ی $\{\phi(x,b'_i)\}_{i\leq k}$ ناسازگار است.

تنها قسمتی از حکم که اثباتش مانده است، این است که دنباله با خودِ b شروع شود. این هم راحت برآورده می‌شود. گفتیم که

$$b'_i \equiv_A b \quad \forall i \in \omega.$$

پس بویژه،

$$b'_0 \equiv_A b$$

یعنی اتومرفیسمی از مدل هیولا پیدا می‌شود که A را حفظ می‌کند و b'_0 را به b می‌رساند. تصویر دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\omega}$ تحت این ایزومرفیسم، دنباله‌ای است که به دنبال آن بوده‌ایم. $\square$

لم بعدی تعمیمی از لمِ بالاست.

قبلاً گفته‌ایم که یک تایپِ جزئیِ π روی یک مجموعه‌ی A اگروتنهااگر بخش می‌شود که عطفی از فرمولهای آن روی A بخش شود. فرض کنید $\pi(x,b)$ تایپی جزئی باشد (یعنی تایپی جزئی که پارامترهای فرمولهای آن همه b است که b ممکن است نامتناهی نیز باشد). این تایپ جزئی روی A بخش نمی‌شود اگروتنهااگر برای هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ I شاملِ b، و برای هر عطفِ $\psi_1(x,b)\wedge\ldots\wedge\psi_n(x,b)$ از فرمولهای آن، مجموعه‌ی زیر سازگار باشد:

$$\{\psi_i(x,d)\}_{i\leq n,d\in I}$$

و بنا به فشردگی، اگروتنهااگر مجموعه‌ی زیر از فرمولها سازگار باشد:

$$\{\psi(x,d)\}_{\psi\in\pi(x,b),d\in I}.$$

اگر $I=(b_i)_{i\in\omega}$، مجموعه‌ی بالا را با نمادِ

$$\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$$

نشان می‌دهند. آنچه در بالا گفته شد را در لم زیر خلاصه می‌کنیم.

لمِ ۳۹. تایپِ جزئیِ $\pi(x,b)$ روی مجموعه‌ی A بخش نمی‌شود اگروتنهااگر برای هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ $I=(b_i)_{i\in\omega}$ شاملِ b، مجموعه‌ی زیر سازگار باشد:

$$\pi(x,I):=\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)=\{\psi(x,d)\}_{d\in I,\psi(x,b)\in\pi(x,b)}.$$

ازاین رو، داریم $a\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{d}_{A}b$ اگروتنهااگر با تعریفِ $\pi(x,b)=\mathrm{tp}(a/Ab)$، برای هر دنباله‌ی $I=(b_i)_{i\in\omega}$ شاملِ b مجموعه‌ی

$$\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)=\{\psi(x,d)\}_{\psi(x,y)\in L_A,\models\psi(a,b),d\in I}$$

سازگار باشد.

در تکنیک ۱۶ دیدیم که اگر I یک دنباله‌ی بازنشناختنی روی A باشد، آنگاه I روی Aa' برای یک $a \equiv_A a'$ نیز بازنشناختنی است. در لم زیر، شرطی مشابه این یافته‌ایم که به $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A b$ منجر می‌شود.

لمِ ۴۰. موارد زیر با هم معادلند.

۱. $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A b$؛ به بیان دیگر، $\mathrm{tp}(a/Ab)$ روی A بخش نمی‌شود.

۲. هرگاه $b_0b_1,\ldots$ یک دنباله‌ی نامتناهیِ بازنشناختنی روی A باشد که b را نیز در بردارد، عنصری مانند $a \equiv_{Ab} a'$ پیدا می‌شود به‌طوری‌که این دنباله روی Aa' بازنشناختنی باشد.

بنا به آنچه در بالا گفته شد، باید به b در $a \equiv_{Ab} a'$ توجه کرد.

اثبات. اثبات ۲ به ۱ آسان است و آن را رها کرده‌ایم.

اثباتِ ۱ به ۲. فرض کنید I دنباله‌ای بازنشناختنی و شاملِ b باشد. نیز، بنا به لم قبل، فرض کنید

$$a'' \models \{\psi(x,c)\}_{c\in I,\psi(x,y)\in L_A,\models\psi(a,b)}.$$

روشن است که $a \equiv_{Ab} a''$ (زیرا $b \in I$). فرض کنید $I' \models EM(I/Aa'')$. توجه کنید که اطلاعات زیر در تایپ اهغن‌موستوفسکی بالا درج شده است:

$$\forall\psi(x,y) \quad \models\psi(a,b) \Rightarrow \quad \forall c\in I \quad \models\psi(a'',c). \quad (*)$$

نیز روشن است که

$$I' \equiv^\sigma_A I$$

و I' روی Aa'' بازنشناختنی است. بنابراین $\sigma(I') = I$ روی $A\sigma(a'')$ بازنشناختنی است. تنها این مانده است که نشان دهیم که $a \equiv_{Ab} \sigma(a'')$. اعمالِ σ به $(*)$ در بالا، ایجاب می‌کند که

$$\forall\psi(x,y) \quad \models\psi(a,b) \Rightarrow \quad \forall\sigma(c)\in\sigma(I) \quad \models\psi(\sigma(a''),\sigma(c)).$$

از آنجا که $b\in\sigma(I)$ از عبارت بالا نتیجه می‌شود که

$$\forall\psi \quad \models\psi(a,b) \Rightarrow \models\psi(\sigma(a''),b),$$

و این همان است که می‌خواهیم. $\square$

پُرسشِ ۴۱. فرض کنید $I = a_0a_1\ldots$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}_{A} I$. نشان دهید دنباله‌ای مانند $I' \equiv_A I$ پیدا می‌شود که آن هم با a_0 شروع می‌شود و روی Aa بازنشناختنی است.

پُرسشِ ۴۲. مشابها نشان دهید که اگر $I_1, \ldots, I_n$ دنباله‌هایی دوبه‌دوبازنشناختنی باشند و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{f}_{A} I_1 \ldots I_n$، آنگاه دنباله‌های $I'_1, \ldots, I'_n$ یافت می‌شوند که دوبه‌دوبازنشناختنید و عنصر آغازین هر I'_i با عنصر آغازینِ I_i یکی است و $I'_1, \ldots, I'_n$ روی Aa دوبه‌دوبازنشناختنید.

لمِ ۴۳. بخش شدن دارای **خاصیت تعدی از چپ** است؛ یعنی

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} b \wedge c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Ab} b \Rightarrow ac \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} b.$$

اثبات. همانطور که در قضیه‌ی قبل دیدیم، $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} b$ معادل است با این که هرگاه $(b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد که b را دربردارد، آنگاه یک عنصرِ $a' \equiv_A a$ پیدا می‌شود که این دنباله روی Aa' بازنشناختنی است. حال $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} b$ و $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa} b$ را فرض بگیرید. می‌خواهیم از این فرض، $ac \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} b$ را ثابت کنیم. برای این منظور، فرض کنید $I = (b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی A شامل b باشد. باید عنصرِ $a'c' \equiv_A ac$ را چنان بیابیم که این دنباله روی $Aa'c'$ بازنشناختنی باشد. از شرطِ $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} b$ نتیجه می‌گیریم که عنصرِ $a' \equiv_A a$ پیدا می‌شود که دنباله‌ی یادشده‌ی I روی Aa' بازنشناختنی است. فرض کنید σ اتومرفیمسی باشد که $a' \equiv_A a$ را تضمین کرده است. بنابراین $I' = \sigma(I)$ دنباله‌ای بازنشناختنی روی Aa است. حال بنا به $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{Aa} b$ یک عنصرِ $c' \equiv_{Aa} c$ داریم که دنباله‌ی I' روی Aac' بازنشناختنی است. حال اگر اتومرفیسم ضامنِ $c' \equiv_{Aa} c$ را به I' اعمال کنیم، به دنباله‌ی I'' می‌رسیم که روی Aac بازنشناختنی است. از طرفی دنباله‌ی I'' با اعمال دو اتومرفیسم به I به دست آمده است. یعنی

$$I'' \equiv_A I.$$

در عبارت بالا، I'' و I را دو چندتایی نامتناهی در نظر گرفته‌ایم. بنابراین اتومرفیمسی هست که I'' را به I می برد و A را دست‌نخورده نگه می‌دارد. اگر این اتومرفیسم σ باشد، از این که I'' روی Aac

بازنشناختنی است نتیجه می‌شود که $I = \sigma(I'')$ روی $\sigma(Aac)$ بازنشناختنی است. پس می‌توان گرفت $a'c' = \sigma(ac)$. $\square$

تعدی از چپ را فُرکیدن هم دارد. این نکته را در لم زیر بدون اثبات بیان کرده‌ایم.

لمِ ۴۴ (تعدی از چپ برای فرکیدن)**.** فرکیدن نیز دارای ویژگی تعدی از چپ است.

لمِ ۴۵. فرض کنید $\pi(x)$ یک مجموعه از فرمولها باشد (مجموعه‌ی پارامترهای آن مهم نیست) که در A متناهیاً برآورده می‌شود. آنگاه π روی A نمی‌فرکد.

بنا بر لم بالا اگر p یک تایپ جهانی و شریک‌ارثی از تایپ $q \in S(M)$ باشد، آنگاه p روی M نمی‌فرکد. بد نیست که به این نیز توجه کنیم که اگر تایپی متناهیاً برآورده‌شدنی در مجموعه‌ای باشد، روی آن مجموعه، ناوردا نیز هست.

اثبات. فرض کنید $\pi(x)$ روی A بفرکد. در این صورت فرمول $\phi_1(x,b) \vee \ldots \phi_n(x,b)$ از آن نتیجه می‌شود که در آن هر $\phi_i(x,b)$ روی A بخش می‌شود. این فرمولها از بخشی متناهی از π نتیجه می‌شوند. یعنی فرمولِ $\psi(x) \in \pi$ را داریم که $\psi(x) \vdash \phi_1(x,b)\vee\ldots\vee\phi_n(x,b)$. از طرفی فرمولِ $\psi(x)$ در A برآورده می‌شود؛ مثلاً $a \in A$ آن را برآورده می‌کند. پس برای یک $\phi \in \{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ داریم $\models \phi(a,b)$. ادعا می‌کنیم که این ϕ روی A نمی‌تواند بخش شود. چراکه اگر $(b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای روی A بازنشناختنی باشد، از شرطِ $b_i \equiv_A b$ و این که $a \in A$ نتیجه می‌شود که برای هر $i < \omega$ داریم $\models \phi_i(a,b_i)$. بنابراین $\{\phi(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است. $\square$

در ادامه، سه لم آورده‌ایم که ویژگی‌های دیگری از فرکیدن را بیانگرند. اثبات اینها را همچون تمرینی به خواننده واگذار می‌کنیم.

لمِ ۴۶. فرض کنید $\pi(x)$ یک تایپ جزئی روی A باشد که سازگار است. آنگاه، π روی A بخش نمی‌شود. به بیان دیگر، برای هر a و A داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A} A$. (دقت کنید که این حکم، برای فرکیدن برقرار نیست. مجموعه‌هایی که برایشان این حکم در فرکیدن برقرار است، پایه‌ی گسترش نامیده می‌شوند. همچنین توجه کنید که این ویژگی در تئوریهای ساده همیشه برقرار است).

لم ۴۷. فرض کنید π یک تایپ جزئی روی B باشد که روی $A \subseteq B$ نمی‌فرکد. آنگاه می‌توان π را به یک تایپ کاملِ p روی B گستراند که روی A نفرکد.

عکس لم بالا نیز برقرار است.

لم ۴۸. فرض کنید $A \subseteq B$ و فرض کنید π تایپی جزئی روی B باشد و $A \subseteq B$. آنگاه اگر π دارای توسیعی جهانی باشد که روی A نفرکد، آنگاه π روی A نمی‌فرکد. به بیان دیگر، اگر برای هر $C \supseteq B$ بتوان π را به تایپی کامل روی C گستراند که روی A نفرکد، آنگاه π روی A نمی‌فرکد.

۷ تایپهای قوی لاسکار، تعریفهای معادل، فرمولهای ضخیم

رابطه‌های زیر را در این بخش به تفضیل خواهیم شناساند.

۱. $a \equiv^{ls} b$؛ یعنی a و b روی A هم‌ارز لاسکاری هستند. به بیان دیگر تایپ لاسکار a و b روی A برابر است.

۲. $nc_A(a,b)$ یعنی a و b هر دو در یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ I روی A واقع شده‌اند.

۳. $\pi_A(a,b)$ یعنی یک مدلِ M شامل A و یک اتومرفیسم در $Aut(M/A)$ هست که a را به b می‌برد.

نیز، در ادامه ثابت خواهیم کرد که $a \equiv^{ls}_A b$ بستار متعدی رابطه‌ی nc_A و نیز بستار متعدی رابطه‌ی π_A است. نیز نشان خواهیم داد که $a \equiv^{ls}_A b$ اگر و تنها اگر $E(a,b)$ برای همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی (نه لزوماً تعریف‌شدنیِ) کراندارِ روی A ناوردا.

بحث را می‌آغازیم: می‌دانیم که $a \equiv_A b$ اگروتنهااگر اتومرفیمسی از مدل هیولا داشته باشیم که A را نقطه‌وار حفظ کند و a را به b ببرد. در زیر لاسکارناوردایی را معرفی کرده‌ایم. لازم به یادآوری است که لاسکارناوردایی، تعمیمِ رابطه‌ی ذکرشده، نیست؛ ولی،همان‌گونه که در ادامه ثابت کرده‌ایم، اگر M یک مدل باشد، آنگاه از $a \equiv_M b$، هم‌تایپیِ لاسکاریِ a, b نتیجه می‌شود. [5]

[5] در نسخه‌های پیشین، به اشتباه نوشته بودم که لاسکار ناوردایی، تعمیم ناوردایی است.

فرض کنید A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد. گروه اتومرفیسمهای قوی لاسکارِ $\mathbb{M}$ روی A را با $Autf(\mathbb{M}/A)$ نشان می‌دهند و آن را چنین تعریف می‌کنند: $Autf(\mathbb{M}/A)$ گروهی است که آن را همه‌ی گروههای $Aut(\mathbb{M}/M)$ تولید می‌کنند که در آن M مدلی شامل A است. بنابراین اگر $g \in Autf(\mathbb{M}/A)$ آنگاه $g(a) = b$ اگروتنهااگر مدلهای $M_1, \dots, M_n$ همه شاملِ A و اتومرفیسمهای $f_i \in Aut(\mathbb{M}/M_i)$ چنان یافت شوند که $b = f_n(f_{n-1}(\dots(f_1(a)\dots)))$. به بیان بهتر، $g(a) = b$ اگروتنهااگر دنباله‌ی متناهیِ $a = a_0, \dots, a_n = b$ چنان یافت می‌شود که برای هر i یک مدلِ M_i شاملِ A داشته باشیم که $a_i \equiv_{M_i} a_{i+1}$.

تعریفِ ۴۹. می‌گوییم چندتاییهای a و b دارای تایپِ قوی لاسکار یکسان روی A هستند اگر نگاشتی در $Autf(\mathbb{M}/A)$ داشته باشیم که a را به b می‌برد.

این را که a و b دارای تایپ قوی لاسکار یکسان روی A هستند، با $a \equiv_A^{ls} b$ نشان می‌دهیم. در ادامه چندین معادلِ این مفهوم معرفی می‌کنیم.

رابطه‌ی $\pi_A(x, y)$ را میان چندتاییها چنین تعریف کنید: $\pi_A(a, b)$ اگروتنهااگر یک مدل M شامل A داشته باشیم و یک اتومرفیسم در $Aut(\mathbb{M}/M)$ که a را به b ببرد. همان گونه که در بالا گفتیم رابطه‌ی $a \equiv_A^{ls} b$ بستار متعدی رابطه‌ی $\pi_A(a, b)$ است. یعنی کوچکترین رابطه‌ی متعدی شامل این رابطه است. بگذارید این را بصورت لم داشته باشیم.

لمِ ۵۰. رابطه‌ی $\equiv_A^{ls}$ بستار متعدی رابطه‌ی π_A است. یعنی $a \equiv_A^{ls} b$ اگر و تنها اگر یک دنباله‌ی متناهیِ $a = c_0 \dots c_n = b$ داشته باشیم که در آن $\pi_A(c_i, c_{i+1})$.

تعریفِ ۵۱. رابطه‌ی $nc_A(a, b)$ را چنین تعریف می‌کنیم: دو عنصرِ a و b دارای این رابطه هستند اگر هر دو روی یک دنباله‌ی نامتناهیِ بازنشناختنی روی A واقع شوند. به بیان دیگر اگر یک دنباله‌ی نامتناهی روی A بازنشناختنی $I = b_0 b_1, \dots$ داشته باشیم که در آن $b_0 = a$ و $b_1 = b$.

لمِ ۵۲. رابطه‌ی $nc_A(a, b)$ رابطه‌ای تایپ تعریف شدنی است. یعنی می‌توان آن را با عطفی نامتناهی از فرمولها تعریف کرد؛ یعنی خانواده‌ای از فرمولها چون $\{\phi_i\}_{i \in I}$ موجود است که

$$nc_A(a, b) \Leftrightarrow \bigwedge \phi_i(a, b).$$

در ادامه ثابت خواهیم کرد که

$$nc_A(a,b) \leftrightarrow \bigwedge_{\text{فرمولی ضخیم } \theta(x,y)} \theta(a,b).$$

نخست باید **فرمولهای ضخیم** را تعریف کنیم.

تعریفِ ۵۳. فرمولِ $\theta(x,y)$ با پارامتر در یک مجموعه ی A را ضخیم می خوانیم هرگاه هیچ دنباله‌ی نامتناهی‌ای مانند (c_i) یافت نشود که برای آن

$$\text{هرگاه} \quad i<j \quad \models \neg\theta(c_i,c_j)$$

به بیان دیگر، هرگاه $\neg\theta$ زنجیری نامتناهی به دست ندهد. و نیز به دیگر بیان، برای هر دنباله‌ی نامتناهی مانند c_i بتوان دو عنصر $i<j$ پیدا کرد که برای آنها داشته باشیم

$$\models \theta(c_i,c_j).$$

قضیه‌ی ۵۴. رابطه‌ی nc_A تایپ تعریف شدنی است؛ داریم

$$nc_A(a,b) \leftrightarrow \bigwedge_{\text{فرمولی ضخیم } \theta(x,y)} \theta(a,b).$$

اثبات. نخست فرض کنید داشته باشیم $nc_A(a,b)$؛ یعنی a,b آغازگر دنباله‌ای بازنشناختنی روی A مانند $(c_i)_{i\in\omega}$ باشند. می خواهیم نشان دهیم برای فرمول ضخیمِ θ با پارامتر در A داریم $\models \theta(a,b)$. فرض کنید داشته باشیم $\models \neg\theta(a,b)$. از آنجا که دنباله‌ی $(c_i)_{i\in\omega}$ روی A بازنشناختنی است، برای هر $i<j<\omega$ داریم $\models\neg\theta(c_i,c_j)$ ؛ این ناقضِ ضخیم بودن فرمول θ است.

حال فرض کنید برای هر فرمولِ ضخیمِ θ داشته باشیم $\models \theta(a,b)$. می خواهیم دنباله‌ای بازنشناختنی روی A بیابیم که با a,b آغاز شود.

توجه کنید که a,b آغازگر یک دنباله ی روی A بازنشناختنیند اگر و تنها اگر یک دنباله‌ی $(c_i)_{i\in\omega}$ پیدا شود که

$$(*) \qquad \text{برای هر } i<j \text{ داشته باشیم } c_ic_j \equiv_A ab$$

توجیه این گفته چندان دشوار نیست: اگر چنین دنباله‌ای پیدا شود، این که برای هر $i < j$ داریم $c_ic_j \equiv_A ab$، در تایپ اهغن موستوفسکیِ آن لحاظ می شود. می توان با کمک لم استاندارد دنباله‌ای یافت که این تایپ اهغن موستوفسکی را برآورد. سپس باید به دنباله‌ی حاصل اوتومرفیسمی اعمال کرد که ضامن آغاز شدن دنباله با a, b شود.

بنا به بند پیش، بسنده است به دنبال دنباله‌ای مانند $(c_i)_{i\in\omega}$ گشتن که ویژگی $(*)$ را داشته باشد.

ادعا: وجود دنباله‌ای که $(*)$ را برآورد معادل حکم زیر است:

$(**)$ برای هر فرمولِ $\theta \in tp(ab/A)$ دنباله ای مانند (c_i) یافت شود که $\models \theta(c_i, c_j)$ برای هر $i < j$.

اثبات ادعا. با کمک لم فشردگی به آسانی ثابت می شود.

به بیان دیگر $(**)$ می گوید که برای هر فرمول در $tp(ab/A)$ نقیض آن فرمول، ناضخیم است. یعنی

$$\theta \in tp(ab/A) \Rightarrow \text{ضخیم نیست } \neg\theta$$

یعنی برای هر فرمولِ θ اگر $\neg\theta$ ضخیم باشد آنگاه $\neg\theta \in tp(ab/A)$. یعنی برای هر فرمولِ θ اگر θ ضخیم باشد، آنگاه $\theta \in tp(ab/A)$. پس، $(**)$ دقیقاً همان است که در فرض قضیه داریم. $\square$

رابطه‌ی میان $\equiv^{ls}$ و nc را در لم ۵۷ بیان کرده‌ایم. پیش از آن چند تعریف دیگر نیز نیاز داریم.

فرض کنید $E(x, y)$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی در مدل هیولا باشد. می‌گوییم E روی A ناوردا است هرگاه چنین شود: اگر a و b در یک کلاس باشند و $a'b' \equiv_A ab$ آنگاه a' و b' نیز در یک کلاسند. به بیان دیگر اگر aEb و $\sigma \in Aut(\mathbb{M}/A)$ آنگاه $\sigma(a)E\sigma(b)$.

می‌گوییم رابطه‌ی هم‌ارزیِ E کراندار است هرگاه کران بالایی برای تعداد کلاسهای آن داشته باشیم. یعنی کاردینالی مانند κ داشته باشیم که تعداد کلاسهای E کمتر از κ باشد.

لمِ ۵۵. موارد زیر برای رابطه‌ی هم‌ارزیِ Aناوردای E معادلند:

۱. تعداد کلاسهای هم‌ارزیِ E کراندار است.

۲. هرگاه $(a_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای Aبازنشناختنی باشد، داریم

$$\models E(a_0, a_1)$$

۳. برای هر مدلِ $A \subset M$ و هر a, b، اگر $a \equiv_M b$ آن‌گاه aEb.

اثبات. اثباتِ ۱ به ۲. فرض کنید یک دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ a_i داشته باشیم که در آن برای هر $i < j$ داشته باشیم $\neg E(a_i, a_j)$. یعنی هر عنصر این دنباله در کلاسی متفاوت با کلاس هر عنصر دیگر در E باشد. آن گاه از آنجا که می‌توان این دنباله‌ی بازنشناختنی را به هر اندازه بزرگ فرض کرد تعداد کلاسهای E بی‌کران است.

اثبات ۲ به ۳. فرض کنید $a \equiv_M b$. نشان می‌دهیم که عنصری مانند c موجود است که $nc_M(a, c)$ و $nc_M(c, b)$. اگر این درست باشد، بنا به موردِ ۲ حکم اثبات می‌شود.

می‌خواهیم عنصری چون c بیابیم که که برای هر فرمول ضخیمِ ϕ داشته باشیم $\models \phi(a, c)$ و $\models \phi(c, b)$. از آنجا که عطف فرمولهای ضخیم، ضخیم است و بنا به فشردگی، کافی است ثابت کنیم که برای هر فرمولِ ضخیمِ ϕ داریم $\models \exists x \phi(a, x) \wedge \phi(x, b)$. از آن جا که ϕ فرمولی ضخیم است، هیچ دنباله‌ی نامتناهیِ (a_i) یافت نمی‌شود که برای هر $i < j$ داشته باشیم $\neg\phi(a_i, a_j)$. بنابراین در مدل هیولا، یک دنباله‌ی ماکزیمالِ $(a_i)_{i<n}$ با این ویژگی داریم. از آنجا که M یک مدل است، این ویژگی از مدل هیولا بدو می‌رسد و از این رو در M یک دنباله‌ی ماکزیمالِ (a_i) داریم که برای هر $i < j$ داشته باشیم $\neg\phi(a_i, a_j)$. از آن جا که این دنباله ماکزیمال در M و نیز در مدل هیولا است، نمی‌توان به آن a یا b را افزود. بنابراین برای یک $i < n$ داریم $\phi(a, a_i)$. نیز از آن جا که $a_i \in M$ و $a \equiv_M b$ داریم $\phi(a_i, b)$. (توجه کنید که فرمول ϕ را متقارن فرض کرده‌ایم).

اثبات ۳ به ۱. اگر E یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مدل هیولا باشد، در هر کلاسی از آن عنصری از M نیز موجود است (زیرا M زیرمدلی مقدماتی از مدل هیولاست). پس تعداد کلاسهای این رابطه، کراندار است. □

تعریف معادل دیگر برای تایپهای قوی لاسکار نیز در لم زیر آمده است.

لمِ ۵۶. $\equiv_A^{ls}$ اشتراک همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزیِ کراندار Aناوردا است.

اثبات. قبلاً نشان داده‌ایم که $\equiv_A^{ls}$ بستار متعددی π_A است. پس $\equiv_A^{ls}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی A ناورداست. نیز این رابطه در شرط ۳ در لم بالا صدق می‌کند، پس کراندار نیز هست. پس اشتراک همه‌ی رابطه‌های هم‌ارزی کراندار زیرمجموعه‌ای از آن است. نیز در بالا ثابت کردیم که اگر E یک

رابطه‌ی هم‌ارزی کراندار باشد، آنگاه از $\pi_A(a,b)$ نتیجه می‌شود $E(a,b)$. یعنی هر رابطه‌ی هم‌ارزی کراندار شامل بستار متعددی π است. □

نیز در لم بعدی رابطه‌ی میان nc و $\equiv^{ls}$ را بیان می‌کنیم.

لم ۵۷. رابطه‌ی $\equiv^{ls}_A$ بستار متعدی رابطه‌ی nc_A است. یعنی $a \equiv^{ls}_A b$ اگروتنهااگر دنباله‌ی متناهیِ $a = a_0, \ldots, b_n$ پیدا شود که در آن هر a_i و a_{i+1} در یک دنباله‌ی روی A بازنشناختنی I_i واقع شده‌اند.

اثبات. مشابه لم قبل، و با استفاده از مورد دوم در لم ۵۵ ثابت می‌شود. □

در زیر خلاصه‌ای از مطالب این بخش را آورده‌ایم:

همه‌ی مفاهیم زیر یکیند:

- $a \equiv^{ls}_A b$.
- در $Autf(\mathbb{M}/A)$ یعنی گروه تولید شده بوسیله‌ی گروههای $\{Aut(M/A)\}_{M \supset A}$ عنصری موجود است که a را به b ببرد.
- یک دنباله‌ی متناهیِ $a = c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n = b$ هست که در آن $c_i \equiv_{M_i} c_{i+1}$ و هر M_i مدلی است شامل A. به بیان دیگر، $\equiv^{ls}_A$ بستار متعدی رابطه‌ی $\pi_A(x,y)$ است که وقتی برقرار است که مدلی شامل A داشته باشیم که x, y روی آن همتایپ باشند.
- یک دنباله‌ی متناهیِ $a = c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n = b$ هست که در آن هر c_i, c_{i+1} در یک دنباله‌ی روی A بازنشناختنی واقع شده‌اند. به بیان دیگر $\equiv^{ls}_A$ بستار متعدی رابطه‌ی $nc_A(x,y)$ است که طی آن x, y شروع کننده دنباله‌ای بازنشناختنی روی A هستند.
- برای هر رابطه‌ی هم‌ارزی کرانداِر A ناوردا مانند E داریم $E(a,b)$. یعنی $\equiv^{ls}_A$ اشتراک همه‌ی این رابطه‌هاست. (کوچکترین این رابطه‌هاست.)

۸ سادگی

منظور از $\omega^{<\omega}$ مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های متناهی از اعداد طبیعی است. می‌توان $\omega^{<\omega}$ را درختی تجسم کرد. در ریشه‌ی این درخت دنباله‌ی $\{0\}$ قرار دارد و سپس روی این ریشه، درخت دارای ω شاخه است. این شاخه‌ها

$$00, 01, 02, 03, 04, \ldots$$

هستند. سپس روی هر یک از این گره‌ها دوباره درخت ω انشعاب می‌یابد:

$$000, 001, 002, 003, 004, \ldots$$

$$010, 011, 012, 013, 014, \ldots$$

$$020, 021, 022, 023, 024 \ldots$$

هر «مسیر» در این درخت یک دنباله‌ی نامتناهی از اعداد طبیعی را می‌دهد. در تعریف زیر، منظور از $(a_s | s \in \omega^{<\omega})$ درختی است که در هر گره‌ی s در آن پارامترِ a_s نشسته است. طبیعتاً روی هر a_s انشعابهای $a_{s0}a_{s1}\ldots$ را داریم. هر $s \in \omega^\omega$ (دقت کنید که نه به توانِ $\omega >$) یک مسیر را در این درخت می‌نمایاند.

تعریفِ ۵۸. می‌گوییم فرمولِ $\phi(x, y)$ (نسبت به عددِ k) **ویژگی درختی** دارد هرگاه یک درختِ $(a_s | s \in \omega^{<\omega})$ از پارامترها داشته باشیم که

۱. در انشعابهای روی هر گره، kناسازگاری داشته باشیم؛ یعنی برای هر $s \in \omega^{<\omega}$ مجموعه‌ی زیر ناسازگار باشد:

$$\{\phi(x, a_{si})\}_{i \in \omega}.$$

۲. در هر مسیرِ غیر افقی، سازگاری داشته باشیم. یعنی برای هر مسیرِ $s \in \omega^\omega$ مجموعه‌ی زیر از فرمولها سازگار باشد: $\{\phi(x, a_\sigma) | \sigma \subseteq s, \sigma \in \omega^{<\omega}\}$. به بیان دیگر، برای هر دنباله‌ی

نامتناهیِ $i_0, i_1, i_2, \ldots$ از اعداد طبیعی، مجموعه‌ی زیر سازگار باشد:

$$\{\phi(x, a_0), \phi(x, a_{0i_0}), \phi(x, a_{0i_0i_1}), \phi(x, a_{0i_0i_1i_2}), \ldots\}.$$

تئوریِ T را **ساده** می‌خوانیم، هرگاه در آن هیچ فرمول $\phi(x, y)$ با خاصیت درختی نداشته باشیم.

اگر فرمولِ $\phi(x, y)$ که خاصیت درختی دارد، دارای پارامتر باشد، می‌توان پارامتر آن را به همه‌ی گره‌ها چسباند و فرض کرد که فرمول بی‌پارامتری دارای خاصیت درختی است. بنابراین در تعریف بالا، با پارامتر یا بی‌پارامتر بودن فرمولها نقشی بازی نمی‌کند.

پیش از ادامه بحث، به مشاهده‌ی ساده‌ی زیر توجه می‌دهیم:

مشاهده ۵۹. فرض کنید A یک مجموعه‌ی پارامتر باشد و T یک تئوری نامتناهی. فرض کنید $I = (b_i)_{i \in \kappa}$ یک دنباله در مدل هیولا باشد که مجموعه‌ی اندیس آن از لحاظ کاردینالی به اندازه‌ی $\kappa > 2^{(|T|+|A|)}$ بزرگ است. آنگاه I زیردنباله‌ای مانند $I' = (a_i)_{i \in \omega}$ دارد که در آن همه‌ی a_i ها روی A همتایپند.

اثبات. حداکثر تعداد تایپهای متفاوت روی A برابر با $2^{|T|+|A|}$ است (تمام زیرمجموعه‌های همه‌ی فرمولهای با پارامتر). پس در هر بیش از $2^{|T|+|A|}$ عنصر از دنباله‌ی I حداقل یک بار تایپ تکراری داریم. نیز داریم $\kappa > 2^{|T|+|A|} \times \aleph_0$. یعنی حداقل $\aleph_0$ تایپ تکراری در دنباله ظاهر می‌شود. $\square$

لم ۶۰. فرمولِ $\phi(x, y)$ دارای ویژگی درختی نسبت به k است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی پارامترِ A، یک دنباله‌ی نامتناهیِ $(b_i)_{i \in \omega}$ پیدا شود که اولاً $\{\phi(x, b_i)\}_{i \in \omega}$ سازگار باشد و ثانیاً برای هر $i \in \omega$ فرمولِ $\phi(x, b_i)$ روی مجموعه‌ی $A \cup \{b_j | j < i\}$ نسبت به k بخش شود.

اثبات. فرض کنید T دارای ویژگی درختی باشد. آنگاه بنا به قضیه‌ی فشردگی، می‌توان درختِ شاهدِ ویژگی درختی را هم از نظر پهنا و هم از نظر ارتفاع به هر اندازه‌ای بزرگ فرض کرد. یعنی برای یک κ و یک $\kappa' < \kappa$ که هر دو کاردینالهایی بسیار بزرگند، درختی مانند $(a_s)_{s \in \kappa^{<\kappa'}}$ و فرمولی مانند $\phi(x, y)$ پیدا می‌شود که زوج $(\phi, (a_s)_{s \in \kappa^{<\kappa'}})$ شاهد ویژگی درختی است. یک مسیر دلخواهِ

$s \in \kappa^{\kappa'}$ را در این درخت نظر بگیرید: $I = (a_\sigma)_{\sigma \subseteq s}$. ادعا می کنیم دنباله‌ی I ویژگی خواسته شده در قضیه را دارد. نخست بنا به ویژگی درختی، $\{\phi(x, a_\sigma)\}_{\sigma \subseteq s}$ سازگار است. دوم این که بنا به روش ساخت، برای هر $\sigma \subseteq s$ در این مسیر، در گرهِ σ تعداد k' عنصر هست که $\{\phi(x, a_{\sigma i}) | i < \kappa'\}$ نسبت به k ناسازگار است. از آنجا که κ' باندازه بزرگ فرض شده است، می‌توان فرض کرد که حداقل ω تا از آنها روی $\{a_{\sigma'} | \sigma' \subseteq \sigma\}$ با $a_{\sigma 0}$ همتاپیند. اینها شاهدند که $\phi(x, a_{\sigma 0})$ روی $\{a_{\sigma'} | \sigma' \subseteq \sigma\}$ نسبت به kبخش می‌شود. در واقع نشان داده‌ایم که دنباله‌ای شبیه به دنباله‌ی خواسته شده در قضیه، ولی با هر اندازه‌ی بزرگ دلخواه پیدا می‌شود.

جهت عکس. فرض کنید $(a_i)_{i \in \omega}$ به همراه ϕ دنباله‌ای با ویژگی یاد شده باشد. می‌خواهیم یک درختِ $(b_s)_{s \in \omega^{<\omega}}$ بسازیم که بهمراهِ ϕ ویژگی درختی را نسبت به k شاهد باشد. در ریشه‌ی درخت، بگیرید $b_0 = a_0$. می‌دانیم که $\phi(x, a_1)$ روی a_0 بخش می‌شود. فرض کنید $(a_{1j})_{j \in \omega}$ شاهد این بخش شدن باشد. برای هر $j \in \omega$ بگیرید $b_{0j} = a_{1j}$. تا اینجا طبقه‌ی اول درخت را ساخته‌ایم. همچنین می‌دانیم که $\phi(x, a_2)$ روی $a_0 a_1$ بخش می‌شود. فرض کنید $(a_{2j})_{j \in \omega}$ شاهد این بخش شدن باشد. برای هر $j \in \omega$ بگیرید $b_{00j} = a_{2j}$. بنابراین روی b_{00} توانستیم انشعاب بزنیم. حال یه دنیال انشعابهای روی b_{01} هستیم. بنا به ساخت می‌دانیم که $b_{00} \equiv_{b_0} b_{01}$. فرض کنید اتومرفیسم σ ضامن رابطه‌ی بالا باشد. آن را به b_{00j} ها اعمال می‌کنیم و شاهدی برای بخش شدنِ $\phi(x, b_{01})$ روی b_0 بدست می‌آوریم. به همین ترتیب روی هر b_{0j} نیز انشعاب می‌زنیم. نیز طبقه‌های بالاتر درخت را با استقرا و به همین ترتیب، با کمک بخش شدن $\phi(x, a_n)$ روی $a_0, \ldots a_{n-1}$ و تصویر آن تحت اتومرفیسها می‌سازیم. تنها می‌ماند نشان دهیم که همه‌ی مسیرها در درخت بدست آمده سازگارند. مسیر اول همان $\phi(x, a_i)$ است که بنا به فرض سازگار است. هر مسیر دلخواه دیگر را که در نظر بگیریم، متناهیاًسازگار است؛ چون هر n جمله‌ی نخست آن تصویر n جمله‌ی نخست دنباله‌ی a_i تحت (ترکیبی از) اتومرفیسهاست. بنابراین همه‌ی مسیرها متناهیاً سازگارند و از این رو همه‌ی مسیرها سازگارند. $\square$

قضیه‌ی ۶۱. تئوری کاملِ T ساده است اگر و تنها اگر فرکیدن در آن دارای **ویژگی مشخصه‌ی موضعی** باشد؛ یعنی برای هر تایپ کاملِ $p \in S(B)$ یک زیرمجموعه‌ی A از B یافت شود که $|A| \leq |T|$ و p روی A نفرکد. به بیان دیگر، هرگاه برای هر مجموعه‌ی پارامترِ B و هر عنصر a یک زیرمجموعه‌ی

$A \subseteq B$ پیدا شود که $|A| \leq |T|$ و $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$.

اثبات. فرض کنید مجموعه‌ی پارامترِ B و عنصر a پیدا شوند که برای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ که $|A| \leq |T|$ داشته باشیم $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$. بنابراین $b_0 \in B$ و فرمولِ ϕ_0 پیدا می‌شوند که $\phi_0(x, b_0)$ روی مجموعه‌ی تهی نسبت به یک عددِ k_0 بخش می‌شود. نیز عنصرِ b_1 و فرمولِ ϕ_1 و عدد k_1 پیدا می‌شوند که $\phi(x, b_1)$ روی $A = \{b_0\}$ نسبت به k_1 بخش می‌شود. به همین ترتیب دنباله‌ای مانند $(b_i | i < |T|^+)$ یافت می‌شود که در آن $\phi(x, b_i)$ روی $\{b_0, \ldots, b_{i-1}\}$ نسبت به k_i بخش می‌شود.

توضیح: مجموعه‌ی اندیس یک دنباله، اوردینال است. منظورمان از $|T|^+$ اوردینالی است که از لحاظ کاردینالی از $|T|$ بزرگتر است. مثلا اوردینالی که تایپ اوردینالی کاردینالِ $2^{|T|}$ باشد. علت این که ننوشته‌ایم $i \in 2^{|T|}$ این است که از لحاظ اوردینالی برای هر اوردینالِ نامتناهیِ κ داریم: $2^\kappa = \kappa$.

از آنجا که اندازه‌ی این دنباله از اندازه‌ی تئوریمان بسیار بزرگتر است، فرمولی مانندِ ϕ در میانِ $\{\phi_i\}_{i<|T|^+}$ و عددی مانند k در میان (k_i) هستند که زوجِ (ϕ, k) حداقل ω بار تکرار شده است. یعنی زیر دنباله‌ی $(b_j)_{j\in\omega}$ از دنباله‌مان پیدا می‌شود که در آن هر $\phi(x, b_j)$ روی $b_0, \ldots, b_{j-1}$ نسبت به k بخش می‌شود. بنا به لمِ ۶۰ این ناقض سادگیِ T است.

جهت عکس. فرض کنید T ساده نباشد. بنا به لمِ ۶۰ یک دنباله‌ی $(b_i)_{i\in|T|^+}$ و فرمولی مانند $\phi(x, y)$ و عددی مانند k داریم که هر $\phi(x, b_i)$ روی $b_{<i}$ نسبت به k بخش می‌شود و نیز $\{\phi(x, b_i) | i \in |T|^+\}$ سازگار است. بگیرید $B = \{b_i | i \in ||T|^+\}$ و فرض کنید $a \models \{\phi(x, b_i) | i \in |T|^+\}$. معلوم است که برای هر زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ با $|A| \leq |T|$ یک عنصرِ $b \in B$ پیدا می‌شود که $\phi(x, b)$ روی A بخش می‌شود. هم‌چنین معلوم است که $\phi(x, b) \in \mathrm{tp}(a/B)$. یعنی برای هر $A \subseteq B$ با اندازه‌ی $|A| \leq |T|$ داریم $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A B$؛ و این همان است که می‌خواستیم. $\square$

در بالا ویژگی مشخصه‌ی موضعی را تعریف کردیم. گفتیم که بخش شدن در یک تئوریِ T دارای ویژگی مشخصه‌ی موضعی است هرگاه برای هر مجموعه‌ی پارامترِ B و هر عنصرِ a در مدل

هیولا، یک زیرمجموعه‌ی نسبتاً کوچکِ (یعنی با اندازه‌ی کمتر از اندازه‌ی تئوریمان) $A \subseteq B$ پیدا شود که

$$a \underset{A}{\overset{d}{\downfree}} B.$$

در قضیه‌ی زیر بیان معادلی برای ویژگی مشخصه‌ی موضعی آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۶۲. در تئوریِ T بخش شدن دارای ویژگیِ مشخصه‌ی موضعی است اگر و تنها اگر یک کاردینالِ κ پیدا شود که برای هر مدل M و هر تایپِ $p \in S(M)$ زیرمجموعه‌ای از M مانند A با $|A| \le \kappa$ داشته باشیم که p روی A بخش نشود. به بیان دیگر

$$\exists \kappa \quad \forall M \models T \quad \forall a \in \text{مدل‌هیولا} \quad \exists A \subseteq M \quad \left(|A| \le \kappa \quad \wedge \quad a \underset{A}{\overset{d}{\downfree}} M \right).$$

اثبات. فرض کنید بخش شدن در T دارای ویژگیِ مشخصه‌ی موضعی نباشد. آنگاه بنا به ۶۱ T ساده نیست و از این رو می‌توان برای هر کاردینالِ κ یک دنباله‌ی $(b_i)_{i<\kappa^+}$ پیدا کرد که در آن $\phi(x, b_i)$ روی $b_{<i}$ نسبت به یک عددِ k بخش می‌شود. می‌خواهیم نشان دهیم که یک مدلِ M و یک تایپ $p \in S(M)$ به گونه‌ای پیدا می‌شوند که برای هر کاردینالِ κ هیچ زیرمجموعه‌ای از M از اندازه‌ی کمتر از κ پیدا نشود که p روی آن بخش نشود.

برای کاردینال داده شده‌ی κ دنباله‌ی یاد شده در بند پیش را در نظر بگیرید. از این که $\phi(x, b_1)$ روی b_0 بخش می‌شود نتیجه می‌گیریم که عنصری مانند $b_1' \equiv_{b_0} b_1$ و مدلی مانند M_1 شامل b_0 وجود دارند که $\phi(x, b_1')$ روی M_1 بخش می‌شود. برای اثبات این، به تکنیکِ ۱۷ مراجعه می‌کنیم: بدین‌صورت که فرض می‌کنیم که M_1 مدلی شاملِ b_0 باشد و b_1' را با استفاده از این تکنیک می‌یابیم. به این ترتیب می‌توان مدل M_2 را شامل b_0, b_1', M_1 به همراه عنصرِ $b_2' \equiv_{b_0 b_1} b_2$ یافت که $\phi(x, b_2)$ روی M_2 بخش می‌شود. با بحثی مشابه (با استقرا) می‌توان دنباله‌ای از عناصرِ $(b_i')_{i \in \kappa^+}$ و دنباله‌ای از مدلهای $\ldots \le M_1 \le M_0$ را به گونه‌ای یافت که $b_i' \in M_j$ برای هر $i < j$ و نیز $\phi(x, b_i')$ روی M_j برای $j < i$ بخش کند. بگیرید $M = \bigcup M_i$. با کمک شیوه‌های مقدماتی نظریه‌ی مدلی می‌توان دید که M مدلی از T است. هر زیرمجموعه از M از اندازه‌ی کمتر از κ در یکی از M_iها می‌افتد. می‌دانیم که تایپِ یک b_i برای یک i باندازه‌بزرگ روی M_i و از این رو روی A بخش

می‌شود. فرض کنید p تایپی در $S(M)$ باشد که همه‌ی $\phi(x, b'_i)$ ها را در بردارد. این تایپ همان است که در پی‌اش بوده‌ایم. $\square$

در قضیه‌ی ۶۱ نشان دادیم که برای هر زیرمجموعه‌ی B از مدل هیولا و هر عنصر a در مدل هیولا، یک زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ پیدا می‌شود که $|A| \leq |T|$ و $a \downarrow^d_A B$. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم که برای فرکیدن، حکمی قویتر درست است. وانگهی در بحثهای آینده نشان خواهیم داد که در تئوریهای ساده، دو مفهوم بخش شدن و فرکیدن با هم معادلند. پیش از پرداختن به قضیه، لمی کمکی را آورده‌ایم:

لم ۶۳. فرض کنید $\phi(x, b)$ روی A بخش شود. در این صورت، عنصری مانند $b' \equiv_A b$ به گونه‌ای پیدا می‌شود که $\phi(x, b)$ روی Ab' بخش شود.

اثبات. فرض کنید I دنباله‌ی بازنشناختنیِ شاهد بخش شدن $\phi(x, b)$ روی A باشد. فرض کنید $I' \models EM(I/Ab)$. در این صورت $I' \equiv^\sigma_A I$ و I' روی Ab بازنشناختی است. پس I روی $A\sigma(b)$ بازنشناختنی است؛ یعنی همین I شاهد بخش شدن $\phi(x, b)$ روی Ab' است که در آن $b' = \sigma(b)$. $\square$

قضیه‌ی ۶۴. فرض کنید T ساده باشد و $p \in S(A)$ تایپی باشد کامل. آنگاه p روی A نمی‌فرکد.

به بیان دیگر، اگر تئوریِ T ساده باشد، آنگاه برای هر عنصر a در مدل هیولا و هر زیرمجموعه‌ی A از مدل هیولا، داریم $a \downarrow_A A$.

اثبات. فرض می‌کنیم که $\mathrm{tp}(a/A)$ روی A بخش شود و با کمک این فرض یک دنباله از فرمولهای $\{\phi(x, a_i)\}$ پیدا می‌کنیم که در آن هر $\phi(x, a_i)$ روی $a_{<i}$ بخش شود، و بدینسان، به‌گونه‌ای که شرح خواهیم داد، بنا به لمِ ۶۰ به این نتیجه خواهیم رسید که T نمی‌تواند ساده باشد.

از فرضِ $a \not\downarrow_A a$ نتیجه می‌شود که

$$\mathrm{tp}(a/A) \models \phi_1(x, b) \vee \ldots \vee \phi_n(x, b) \quad (*)$$

که در آن b عنصری در مدل هیولا است و هر $\phi_i(x,b)$ روی A بخش می‌شود. نیز، حداقل یکی از ϕ_i ها (فرض کنیم که آن یکی $\phi(x,b)$ باشد) با $\mathrm{tp}(a/A)$ سازگار است (در غیر این صورت، نقیض هر یک، از این تایپ نتیجه می‌شود و این ناقضِ $(*)$ خواهد بود). همچنین بنا به فشردگی فرمولی مانند $\psi(x,a') \in \mathrm{tp}(a/A)$ پیدا می‌شود که

$$\psi(x,a') \models \phi_1(x,b) \vee \ldots \vee \phi_n(x,b)(**).$$

گفتیم که $\phi(x,b)$ با $\mathrm{tp}(a/A)$ سازگار است و روی A بخش می‌شود. لمِ پیشین (لمِ ۶۳) را اعمال می‌کنیم: عنصری مانند $b' \equiv_A b$ پیدا می‌شود که $\phi(x,b)$ روی Ab' بخش می‌شود. از این که $b' \equiv_A b$ و از $(**)$ نتیجه می‌شود که $\psi(x,a') \models \phi_1(x,b') \vee \ldots \vee \phi_n(x,b')$. یعنی فرمولی در میان $\phi_1(x,b'),\ldots,\phi_n(x,b')$ پیدا می‌شود که با $\mathrm{tp}(a/A)$ سازگار است. فرض می‌کنیم این فرمول، ψ باشد. پس تا کنون دنباله‌ی (دوعضوی) زیر را داریم: (توجه کنید که ψ را اول نوشته‌ایم).

$$\psi(x,b'), \phi(x,b)$$

دنباله‌ی بالا دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. هر فرمول در آن از میان $\phi_1,\ldots,\phi_n$ انتخاب شده است (البته پارامترهای آنها متفاوتند).

۲. $\psi(x,b') \cup \phi(x,b) \cup \mathrm{tp}(a/A)$ سازگار است.

۳. $\phi(x,b)$ روی Ab' بخش می‌شود و $\psi(x,b')$ روی A بخش می‌شود.

با ادامه‌ی این روند به دنباله‌ای مانند $(\epsilon_i(x,b_i))_{i\in\omega}$ می‌رسیم که ویژگیهای زیر را دارد:

۱. هر $\epsilon_i(x,y)$ فرمولی از میان $\phi_1,\ldots,\phi_n$ است.

۲. هر $\epsilon_i(x,b_i)$ روی $b_{<i}$ بخش می‌شود.

۳. خانواده‌ی $\mathrm{tp}(a/A) \cup \{\epsilon_i(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است.

از شماره‌ی اول نتیجه می‌شود که یک فرمول در میان $\phi_1, \ldots, \phi_n$ هست که بینهایت بار در این دنباله تکرار شده است. تکرارهای این فرمول به همراه پارامترهای آنها، دنباله‌ای به دست می‌دهد که بنا به لمِ ۶۰ ناقض سادگی است. $\square$

لمِ ۶۵. فرض کنید $A \subseteq B$ و $\pi(x)$ یک تایپ جزئی روی B باشد که روی A نمی‌فرکد. در این صورت $\pi(x)$ را می‌توان به یک تایپ کامل مانند $p \in S_x(B)$ گستراند که روی A نمی‌فرکد.

به بیان دیگر (بدون نیاز به سادگی) $$\forall A \subseteq C \subseteq B \quad \forall a \quad [a \underset{A}{\downarrow} C \Rightarrow \exists b \equiv_C a \quad b \underset{A}{\downarrow} B]$$

اثبات. فرض کنید $\phi(x) \notin \pi(x)$. ادعا می‌کنیم که یا $\phi(x) \cup \pi(x)$ روی A نمی‌فرکد و یا $\neg\phi(x) \cup \pi(x)$. فرض کنیم هردوی اینها روی A بفرکند. در این صورت

$$\pi \cup \phi \models \phi_1 \vee \ldots \phi_n$$

$$\pi \cup \neg\phi \models \psi_1 \vee \ldots \psi_n$$

و هر ϕ_i و هر ψ_i روی A بخش می‌شود. پس

$$\pi \vee (\phi \vee \neg\phi) \models (\phi_1 \vee \ldots \phi_n) \vee (\psi_1 \vee \ldots \psi_n).$$

یعنی

$$\pi \models (\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n) \vee (\psi_1 \vee \ldots \psi_n)$$

و این یعنی π روی A بخش می‌شود.

حال توجه کنید که اگر $\pi(x) \cup \phi(x)$ روی A بخش نشود، آنگاه سازگار است. بنابراین با افزودن این‌چنین فرمولها به π به تایپی کامل می رسیم که روی A بخش نشود. $\square$

در لم قبل، یک تایپ جزئی فرک‌نکننده را به تایپ کامل گستراندیم. در لم زیر خواهیم دید که در تئوریهای ساده می‌توان یک تایپ کامل فرک‌نکننده را به تایپی کامل روی مجموعه‌ی پارامتر بزرگی گستراند که نیز نفرکد.

نتیجه‌ی ۶۶. فرض کنید T ساده باشد و $p \in S_x(A)$ یک تایپ دلخواه باشد. آنگاه برای هر $A \subseteq B$ می‌توان تایپ p را به یک تایپ $p \in S_x(B)$ گستراند که روی A نفرکد.

(ویژگی وجود) به بیان دیگر، اگر T یک تئوری ساده باشد، برای هر a و هر $A \subseteq B$ می‌توان عنصری مانند b یافت که $$b \equiv_A a \quad \text{و} \quad b \underset{A}{\downarrow} B.$$

اثبات. در قضیه‌ی ۶۴ ثابت کردیم که هر $p \in S_x(A)$ روی A نمی‌فرکد. تایپ $p \in S_x(A)$ را می‌توان یک تایپِ جزئی روی $A \subseteq B$ پنداشت. در لم ۶۵ ثابت کردیم هر تایپ جزئي روی B را که روی A نفرکد می‌توان به تایپی کامل با پارامتر در B گستراند که روی A نفرکد. □

تعریفِ ۶۷. دنباله‌ی $(a_i)_{i \in I}$ را مستقل روی A می‌خوانیم هرگاه برای هر i داشته باشیم $a_i \downarrow_A a_{<i}$. (با تعریف دنباله‌ی مُرلی در بخشِ ۳ مقایسه شود).

لمِ ۶۸. فرض کنید $(a_i)_{i \in I}$ دنباله‌ای مستقل روی A باشد و J, K دو زیرمجموعه باشند از I به گونه‌ای که

$$\forall j \in J \quad \forall k \in K \quad j < k.$$

آنگاه

$$(a_k)_{k \in K} \overset{d}{\underset{A}{\downarrow}} (a_j)_{j \in J}$$

اثبات. اثبات این لم را با ارجاع به ویژگیِ تعدی برای بخش شدن، به خواننده واگذار می‌کنیم. □

در بخش ۳ دنباله‌های مُرلی را معرفی و شرایطِ وجود آنها را بررسی کردیم. نیز نشان دادیم که در یک تایپ جهانی ناوردا همیشه یک دنباله‌ی مُرلی پیدا می‌شود. در لم بعد می‌بینیم که در هر تایپی که نفرکد می‌توان دنباله‌ای مرلی پیدا کرد. در نتیجه‌ی آن، اگر T ساده باشد، در هر تایپی می‌توان یک دنباله‌ی مُرلی پیدا کرد.

لمِ ۶۹.

۱. فرض کنید $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B$. آنگاه یک دنباله‌ی $I = (a_i)_{i\in\omega}$ پیدا می‌شود که

- $a_i \equiv_A a$.
- I روی B بازنشناختنی است.
- I روی A مُرلی است (یعنی روی آن بازنشناختنی و مستقل است).

۲. اگر T ساده باشد، برای هر $p \in S(A)$ یک دنباله‌ی مُرلی روی A پیدا می‌شود که عناصرش p را برمی‌آورند.

اثبات. اثبات قسمت اول. فرض کنید $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A B$. فرض کنید $a_0 = a$. آنگاه بنا به لمِ ۶۵ می‌توان عنصر a_1 را چنان یافت که $a_1 \equiv_A a_0$ و $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A Ba_0$. (نیز از عبارت دوم نتیجه می‌شود که $a_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Aa_0} B$.) با ادامه‌ی این روند، می‌توان به دنباله‌ی به‌اندازه‌ی‌دلخواه‌بزرگِ $(a_i)_{i\in I}$ رسید که در آن $a \equiv_A a_i$ و نیز $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Aa_{<i}} B$. تنها حکمی از قضیه که مانده است، بازنشناختنی بودن دنباله روی B است. با استفاده از لم شلاخ، می‌توان دنباله‌ای مانند $(b_i)_{i\in\omega}$ را پیدا کرد که روی B بازنشناختنی است و تایپهایش از دنباله‌ی (a_i) می‌آیند. این دنباله، ویژگیِ $b_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_{Ab_{<i}} B$ را نیز از $(a_i)_{i\in I}$ به ارث می‌برد.

پُرسشِ ۷۰. آیا می‌شد در پایان اثبات، بجای لم شلاخ از لم استاندارد استفاده کرد؟

اثبات بخش دوم. گفتیم که اگر T ساده باشد، همواره داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}_A A$. حال از بخش اول قضیه، حکم نتیجه می‌شود. □

گفته بودیم که تایپ جزئیِ $\pi(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود اگروتنهااگر برای هر دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ $b=b_0,b_1,\dots$ مجموعه‌ی $\bigcup \pi(x,b_i)=\{\phi(x,b_i)|\phi(x,b)\in\pi\}$ سازگار باشد. در قضیه‌ی بعد خواهیم دید که اگر T ساده باشد، به جای آزمودن این محک برای همه‌ی دنباله‌های روی A بازنشناختنی، کافی است درستی آن را تنها برای یک دنباله‌ی مُرلی روی A تحقیق کنیم.

قضیه‌ی ۷۱. فرض کنید T ساده باشد و $\pi(x,y)$ تایپی جزئی باشد روی A. اگر $b=b_0,b_1,\dots$ دنباله‌ای مُرلی روی A و به گونه‌ای باشد که $\bigcup_{i<\omega}\pi(x,b_i)$ سازگار است، آنگاه $\pi(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود.

اثبات. بازیگران اصلی این اثبات، ویژگی مشخصه‌ی موضعی و ویژگی تعدی از چپ بخش شدن هستند.

فرض کنید $(b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای مرلی به گونه‌ی گفته شده در قضیه باشد. نخست بدین نکته توجه می‌دهیم که با استفاده از فشردگی، برای هر ترتیب خطیِ I می‌توان دنباله‌ی مُرلیِ $(b_i)_{i\in I}$ را یافت که در آن $b\equiv_A b_i$ و $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ سازگار است.

فرض کنید $(b_i)_{i\in I}$ دنباله‌ای مُرلی وارون باشد که در آن $b\equiv_A b_i$ و $\bigcup_{i\in\omega}\pi(x,b_i)$ سازگار است. باشد. «مُرلی وارون» یعنی آن گونه که $b_i\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b_{>i}$. فرض کنید

$$c\models\bigcup_{i\in I}\pi(x,b_i).$$

قبلاً ثابت کرده‌ایم که وقتی T ساده باشد، بخش شدن دارای خاصیت مشخصه‌ی موضعی است؛ یعنی برای هر a و B یک زیرمجموعه‌ی $B'\subseteq B$ پیدا می‌شود $|B'|\leq|T|$ و $a\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^d_{B'} B$. بگیرید $B=A\cup\{b_i|i\in I\}$. بنا به ویژگی مشخصه‌ی موضعی، $i_0\in I$ یافت می‌شود که

$$c\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A\cup\{b_i|i<i_0\}}\{b_i|i\in I\}.$$

بنابراین

$$c\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{d}_{A\cup\{b_i|i<i_0\}}\{b_i|i\leq i_0\}.$$

در لم ۶۸ گفتیم که اگر (تحت شرایط آن لم) $J, K \subseteq I$ به گونه‌ای باشند که $J < K$ آنگاه $(a_k)_{k\in K} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A (a_j)_{j\in J}$. پس (با توجه به مُرلی وارون بودن دنباله‌مان)

$$(b_i)_{i<i_0} \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}}} b_{i0}.$$

حال بنا به ویژگی تعدی از چپ برای بخش شدن داریم:

$$\begin{cases} (b_i)_{i<i_0} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A b_{i0} \\ c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_{A\cup\{b_i|i<i_0\}} b_{i0} \end{cases} \Rightarrow \quad c(b_i)_{i<i_0} \underset{A}{\overset{d}{\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}}} b_{i_0}$$

پس $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A b_{i0}$. ازآنجاکه $c \models \pi(x, b_{i0})$ این یعنی $\pi(x, b_{i0})$ روی A بخش نمی‌شود. ازآنجاکه $b \equiv_A b_{i0}$ نتیجه می‌گیریم که $\pi(x, b)$ روی A بخش نمی‌شود. $\square$

ملاحظه‌ی ۷۲ (بیان دیگری از قضیه‌ی بالا)**.** فرض کنید T ساده باشد. هرگاه دنباله‌ای مرلی مانند $b = b_0, \ldots$ پیدا شود که $\{\phi(x, b_i)|i \in \omega\}$ سازگار باشد، آنگاه $\phi(x, b)$ روی A بخش نمی‌شود. همچنین اگر دنباله‌ای مرلی مانند $b = b_0, \ldots$ پیدا شود که $\bigcup \pi(x, b_i)$ سازگار باشد و در آن $\pi(x, b) = \mathrm{tp}(a/bA)$، آنگاه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^d_A b$. نیز بیان دیگری از نتیجه ی بالا این است که هرگاه T ساده باشد و فرمول $\phi(x, b)$ بخش شود، آنگاه هر دنباله ی مرلی شامل b شاهدی بر این بخش شدن است.

نتیجه‌ی ۷۳. فرض کنید T ساده باشد و I دنباله ای مرلی روی A باشد. اگر I روی Ac بازنشناختنی باشد، داریم $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_A I$.

اثبات. فرض کنید $I = (a_i)_{i\in\omega}$ و $\phi(x, a_i) \in \mathrm{tp}(c/I)$ فرمولی باشد که روی A بخش می شود. بنا بر آنچه پیش از این نتیجه گفتیم، خودِ دنباله ی I باید شاهدی بر این بخش شدن باشد؛ یعنی باید داشته باشیم که $\phi(x, I)$ ناسازگار است. چنین چیزی ممکن نیست، زیرا از آنجا که I روی c بازنشناختنی است و $\models \phi(c, a_i)$، برای هر j داریم $\models \phi(c, a_j)$. یعنی $c \models \phi(x, I)$. $\square$

پیش از این بارها گفته‌ایم که در تئوریهای ساده، فرکیدن و بخش شدن با هم معادلند. در زیر این گفته را سرانجام ثابت کرده‌ایم.

گزاره‌ی ۷۴. فرض کنید T ساده باشد. فرمولِ $\phi(x,b)$ روی مجموعه‌ی پارامترِ A بخش می‌شود اگر و تنها اگر روی آن بفرکد.

اثبات. این که بخش شدن، فرکیدن را نتیجه می‌دهد از تعریف این دو مفهوم مشخص است.

فرض کنید $\phi(x,b)$ روی A بخش نشود، ولی بفرکد. پس بنا به تعریف، $\phi(x,b) \models \psi_1(x,b) \vee \ldots \vee \psi_n(x,b)$ که در آن هر ψ_i روی A بخش می‌شود. بنا به سادگیِ T و لمِ ۶۹ در تایپِ $\mathrm{tp}(b/A)$ یک دنباله‌ی مُرلی روی A پیدا می‌شود. از این که $\phi(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود نتیجه می‌شود $\vee\psi_i(x,b)$ نیز روی A بخش نمی‌شود و از این رو $\{\vee\psi_i(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است. ادعا می‌کنیم که برای یک $j \in \{1,\ldots,n\}$ مجموعه‌ی $\{\psi_j(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است. فرض کنید $c \models \{\vee\psi_i(x,b_i)\}_{i\in\omega}$. آن گاه برای هر b_i یک $j(i)$ هست که $c \models \psi_{j(i)}(x,b_i)$. از آنجا که تعداد j ها متناهی است، بنا به اصل لانه‌ی کبوتری یکی از $j(i)$ (مثلاً $j(i) = j'$) ها بینهایت بار ظاهر می‌شود، و از این رو $\{\psi_{j'}(x,b_i)\}_{i\in\omega}$ سازگار است.

تا کنون ثابت کردیم که برای یک دنباله‌ی مُرلیِ b_i مجموعه‌ی $\psi_j(x,b_i)$ سازگار است. اکنون بنا به لمِ ۷۱ فرمول $\psi_j(x,b)$ روی A بخش نمی‌شود؛ و این ناقضِ فرض اولمان است. □

۹ ویژگی‌های فرکیدن در تئوریهای ساده

در بخش پیش، برخی ویژگی‌های فرکیدن را در تئوریهای ساده اثبات کردیم. در زیر همه‌ی آنها را در قضیه‌ای جمع آورده‌ایم.

قضیه‌ی ۷۵ (چند ویژگی فرکیدن در تئوریهای ساده)**.**

۱. ویژگی تقارن: اگر $b \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A a$ آنگاه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_A b$.

۲. ویژگی یکنوایی و تعدی: داریم

$$a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} b \wedge c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{aA} b \Leftrightarrow ac \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{A} b$$

۳. ویژگی وجود. برای هر a و هر $A \subseteq B$ می‌توان عنصری مانند b یافت که

$$b \equiv_A a \quad \text{و} \quad b \underset{A}{\downarrow} B.$$

۴. ویژگی مشخصه‌ی موضعی: برای هر مجموعه‌ی پارامترِ B و هر عنصر a یک زیرمجموعه‌ی $A \subseteq B$ یافت می‌شود که $|A| \leq |T|$ و $a \downarrow_A B$.

۵. ویژگی مشخصه‌ی متناهی. داریم $a \downarrow_A B$ اگر وتنها اگر برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ b از B داشته باشیم $a \downarrow_A b$.

۶. همواره داریم $a \downarrow_A A$.

۷. ویژگی استقلال روی مدلها. فرض کنید $M \models T$ و همچنین فرض کنید

$$b \underset{M}{\downarrow} B$$

$$c \underset{M}{\downarrow} C$$

$$B \underset{M}{\downarrow} C$$

$$b \equiv_M c$$

آنگاه عنصری مانند d یافت می شود که

$$d \equiv_B b$$

$$d \equiv_C c$$

$$d \underset{M}{\downarrow} BC.$$

اثبات. ویژگی تقارن. بنا به ویژگی مشخصه‌ی متناهی برای فرکیدن، کافی است ویژگی تقارن را برای حالتی ثابت کنیم که چندتایی‌های a و b متناهیند.

بگیرید $p(x,y)=\mathrm{tp}(ab/A)$. می‌دانیم که $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A b$ اگروتنهااگر $p(x,b)$ روی A بخش نشود، اگروتنهااگر (بنا به سادگی) یک دنباله‌ی مُرلی (b_i) روی A پیدا شود که که $b \equiv_A b_i$ و $\bigcup p(x,b_i)$ سازگار باشد.

نیز داریم $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A b$ اگروتنها اگر $p(a,y)$ روی A بخش نشود، اگروتنهااگر یک دنباله‌ی روی A مرلی I شامل a پیدا شود که $p(I,y)$ سازگار باشد.

حال فرض کنید $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}_A b$. بنا به لمِ ۶۹ در تایپ $\mathrm{tp}(a/Ab)$ می‌توان دنباله‌ای مُرلی در A مانند I پیدا کرد که روی Ab بازنشناختنی باشد. از بازنشناختنی بودن این دنباله روی Ab و از این که $\models p(a,b)$ نتیجه می‌شود که $p(I,y)$ سازگار است، زیرا $b \models p(I,y)$.

ویژگی تعدی از چپ را قبلا برای بخش شدن ثابت کرده‌ایم. بنا به تقارن، در تئوریهای ساده، تعدی از راست نیز برقرار است.

باقی ویژگی‌ها مگر ویژگی استقلال روی مدلها را در بخش قبلی ثابت کرده‌ایم. بخش بعدی را به اثبات ویژگی استقلال روی مدلها اختصاص داده‌ایم. $\square$

۱۰ ویژگی استقلال در تئوریهای ساده

این بخش را با چند لم و قضیه‌ی کمکی می‌آغازیم و آن را با اثبات قضیه‌ی استقلال روی مدلها به پایان می‌بریم.

لمِ ۷۶. فرض کنید M یک مدل باشد و $a \equiv_M b$. آنگاه عنصری مانند c پیدا می شود که $nc_M(a,c)$ و $nc_M(c,b)$.

اثبات. بنا به قضیه‌ی ۵۴ کافی است نشان دهیم که برای فرمولِ ضخیمِ ϕ روی M داریم $\models \phi(a,c)$ و $\models \phi(b,c)$. از آنجا که ϕ ضخیم است، هیچ دنباله‌ی نامتناهی‌ای مانند $(c_i)_{i\in\omega}$ پیدا نمی‌شود که برای هر $i<j$ داشته باشیم $\neg\phi(c_i,c_j)$. یعنی، بنا به لم فشردگی یک کران بالای n برای طول چنین دنباله‌هایی (در مدل هیولا) داریم. از آنجا که M مُدل است، و هر مدل، زیرمدلی مقدماتی از مدل هیولا است، این ویژگی در M نیز لحاظ می‌شود. یعنی یک عدد طبیعی n و دنباله‌ای مانند $(c_i)_{i<N}$ یافت می شود که $\neg\phi(c_i,c_j)$ برای هر $i<j$؛ و دنباله‌ای از این بلندتر با این ویژگی پیدا

نشود. از این که این دنباله بیشینال (ماکزیمال) است، نتیجه می شود که a را نمی توان به آن افزود. یعنی $\models \phi(a, c_0)$. از آنجا که $a \equiv_M b$ هم چنین داریم $\models \phi(b, c_0)$. پس c_0 عنصری است که در پی آن هستیم. $\square$

قبلاً نشان داده‌ایم که اگر تایپی در مجموعه‌ای هر بخش متناهیش برآورده شود، روی آن مجموعه بخش نمی‌شود. (و بنابراین هر شریک ارث یک گسترش بخش‌نشونده است). در نتیجه‌ی زیر از این نکته استفاده کرده‌ایم.

نتیجه‌ی ۷۷. فرض کنید I دنباله‌ای بازنشناختنی روی A باشد. فرض کنید دنباله‌ی J دنباله‌ای بی‌پایان و به گونه‌ای باشد که $(J + I)$ (یعنی دنباله‌ای که بخش نخستینش J است و پس از آن I آغاز می‌شود) روی A بازنشناختنی است. آنگاه I روی AJ مُرلی است.

اثبات. فرض کنید $I = (a_i)$. می خواهیم نشان دهیم که $a_i \downarrow_{AJ} a_{<i}$. برای این منظور باید نشان داد که $\mathrm{tp}(a_i/AJa_{<i})$ روی AJ بخش نمی‌شود. نیز، برای این منظور باید نشان دهیم که $\mathrm{tp}(a_i/AJ)$ روی AJ بخش نمی‌شود؛ زیرا اگر فرمولی مانند $\phi(x, \bar{a}, --) \in \mathrm{tp}(a_i/AJa_{<i})$ داشته باشیم که روی AJ بخش شود که در آن $\bar{a} \in a_{<i}$، آنگاه بنا به بازنشناختنی بودنِ $J + I$ می‌توان پارامترِ $\bar{a}$ را با عناصری از دنباله‌ی J جایگزین کرد و بدینسان فرمولی در $\mathrm{tp}(a_i/AJ)$ بدست آورد که روی AJ بخش می‌شود.

نیز، هر فرمولِ ϕ در این تایپ، در AJ برآورده می شود. علت این است که این فرمول را می توان به گونه ی $\phi(x, ab_{j_1} \dots b_{j_n})$ نوشت که در آن $a \in A$ و b_{j_k} ها عناصری از دنباله‌ی J هستند. از آنجا که $J + I$ بازنشناختنی است، هر b_l در J که پانویسِ l در آن به اندازه بزرگ باشد، این فرمول را برآورده می کند. $\square$

لمِ ۷۸. فرض کنید T ساده باشد و $\phi(x, a)$ روی A نفرکد و داشته باشیم $nc_A(a, b)$. آنگاه $\phi(x, a) \wedge \phi(x, b)$ نیز روی A نمی‌فرکد.

اثبات. می‌دانیم که در تئوریهای ساده بخش شدن و فرکیدن با هم معادلند، پس حکم را تنها برای بخش شدن ثابت می‌کنیم. همچنین برای آسانی، فرض می‌کنیم که A تهی باشد.

از $nc(a,b)$ نتیجه می‌شود که دنباله‌ای بازنشناختنی مانند I داریم که جمله‌های اول آن a و b هستند. دنباله‌ی بی‌انتهای J را چنان پیدا می‌کنیم که $I+J$ بازنشناختنی باشد. در ادامه‌ی اثبات به دنبال یک عنصر c می‌گردیم که شرطهای زیر را برآورد: $\models \phi(c,a)\wedge\phi(c,b)$؛ و $c \downarrow JI$. واضح است که اگر c پیدا شود اثبات تمام است.

بنا به ساده بودن می‌توان عنصری مانند c چنان یافت که $\models \phi(c,a)$ و $c \downarrow Ja$. از $c \downarrow Ja$ نتیجه می‌شود که هر دنباله‌ی بازنشناختنی شامل Ja (از جمله دنباله‌ی I) روی یک کپی (تحت اتومرفیسم) از c بازنشناختنی است. پس c را با آن کپی جایگزین کرده فرض می‌کنیم که $c \downarrow Ja$ و I روی c بازنشناختنی است. پس داریم $\models \phi(c,a)\wedge\phi(c,b)$.

از لم قبل نتیجه می‌شود که I روی J مرلی است. پس بنا به لم ۷۳ داریم $c \downarrow_J I$. حال بنا به ویژگی تعدی، از $c \downarrow J$ و $c \downarrow_J I$ نتیجه می‌گیریم که $c \downarrow JI$؛ و این همان است که می‌خواستیم. $\square$

لم ۷۹. فرض کنید T یک تئوری دلخواه باشد. فرض کنید $(b_i)_{i\in\omega}$ دنباله‌ای بازنشناختنی و به گونه‌ای باشد که $(b_i)_{i\geq 1}$ روی ab_0 بازنشناختنی باشد. در این صورت عنصری مانند c پیدا می‌شود که $nc(ab_0, cb_1)$.

اثبات. نخست یک دنباله‌ی (a_i) چنان پیدا می‌کنیم که برای هر i داشته باشیم

$$ab_0b_1\ldots \equiv a_ib_ib_{i+1}\ldots \quad .$$

حال دنباله‌ی (a_ib_i) را در نظر بگیرید. از شرط بالا و فرض قضیه نتیجه می‌گیریم که برای هر $i<j$، دنباله‌ی $b_jb_{j+1}\ldots$ روی a_i بازنشناختنی است. این ویژگی در تایپ اهغن موستوفسکی دنباله‌ی (a_ib_i) لحاظ می‌شود. بنابراین اگر $(d_ic_i)\models EM(a_ib_i)$ آنگاه

$$d_0c_0c_1\ldots \equiv a_0b_0b_1\ldots$$

دنباله‌ای که با اعمال اتومرفیسم ضامن رابطه‌ی بالا به دنباله‌ی (c_id_i) به دست می‌آید، دنباله‌ای بازنشناختنی است که جمله‌ی اول آن ab_0 است و جمله‌ی دوم به شکل cb_1. $\square$

قبلاً ثابت کردیم که هرگاه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\downarrow}_A^d b$ برقرار باشد، آنگاه هر دنباله‌ی بازنشناختنیِ شاملِ b روی یک $a \ a' \equiv_{bA}$ بازنشناختنی است. فرض کنید $a \downarrow_b b'$. نیز فرض کنید $nc(b, b')$؛ یعنی یک دنباله‌ی بازنشناختنیِ $I = b, b', b_2, \ldots$ داشته باشیم. بنا بر آنچه در در ابتدای این بند گفتیم، دنباله‌ی $b', b_2, \ldots$ روی ba' بازنشناختنی است، که در آن $a \equiv^{\sigma}_{bb'} a'$. با اعمالِ σ به I دنباله‌ی $I' = b, b', b'_2, \ldots$ به دست می‌آید که در آن $b', b'_2, \ldots$ روی ab بازنشناختنی است. حال بنا به لم پیش، عنصری مانند c پیدا می‌شود که ab و cb' در یک دنباله‌ی بازنشناختنی واقع شود. پس نتیجه‌ی زیر را اثبات کردیم.

نتیجه‌ی ۸۰. فرض کنید T ساده باشد و داشته باشیم $a \downarrow_b b'$ و $nc(b, b')$. آنگاه عنصری مانند a' یافت می‌شود که داشته باشیم $nc(ab, a'b')$.

نتیجه‌ی ۸۱. اگر $\phi(x, a) \wedge \phi(x, b)$ روی A نفرکد و $nc(b, b')$ و $a \downarrow_{Ab} b'$، آنگاه $\phi(x, a) \wedge \psi(x, b')$ نیز روی A نمی‌فرکد.

قضیه‌ی ۸۲ (ویژگی استقلال روی مدلها در تئوریهای ساده)**.** فرض کنید T ساده باشد و $M \models T$. همچنین فرض کنید

$$b \underset{M}{\downarrow} B$$

$$c \underset{M}{\downarrow} C$$

$$B \underset{M}{\downarrow} C$$

$$b \equiv_M c$$

آنگاه عنصری مانند d یافت می شود که

$$d \equiv_B b$$

$$d \equiv_C c$$

$$d \underset{M}{\downarrow} BC.$$

اثبات. ادّعا می‌کنیم که تحت شرایط این قضیه، $\mathrm{tp}(b/B)\cup\mathrm{tp}(c/C)$ روی M نمی‌فرکد. اگر این ادعا درست باشد، حکم قضیه به آسانی نتیجه می‌شود: $\mathrm{tp}(b/B)\cup\mathrm{tp}(c/C)$ را همچون تایپی جزئی روی $B\cup C$ در نظر می‌گیریم. این تایپ جزئی دارای گسترشی به به یک تایپ کاملِ $\mathrm{tp}(d/B\cup C)$ است که این تایپ روی M نمی‌فرکد (هر تایپ جزئی‌ای که نفرکد، به تایپی کامل گسترش می‌یابد که آن نیز نفرکد). پس داریم $b\equiv_B d$ و $c\equiv_C d$ و $d\downarrow_M BC$. در ادامه، روی اثبات ادّعا متمرکز می‌شویم.

می‌خواهیم ثابت کنیم که هیچ فرمولی در $\mathrm{tp}(b/B)\cup\mathrm{tp}(c/C)$ روی M نمی‌فرکد. فرمولهای $\phi(x,b')\in\mathrm{tp}(b/B)$ و $\psi(x,\ c')\in\mathrm{tp}(c/C)$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم $\{\phi(x,b'),\psi(x,c')\}$ روی M نمی‌فرکد. در فرضها داریم که $B\downarrow_M b$ و $C\downarrow_M c$. پس داریم $b'\downarrow_M b$ و $c'\downarrow_M c$ (زیرا $b'\in B$ و $c'\in C$). نیز بنا به فرضها داریم $c'\downarrow_M b'$.

عنصرِ a'' را چنان بگزینید که $a''c\equiv_M b'b$ و $a''\downarrow_{Mc} c'b'b$.

روش یافتن a'': بنا به فرضها می‌دانیم که $c\ \equiv_M\ b$. فرض کنیم که x عنصری باشد که $\{\phi(x,c)|\models\phi(b',b)\}\models x$. اگر $x\equiv_{Mc} a''$. آنگاه $a''c\equiv_{Mc} b'b$. حال بنا به ویژگی وجود می‌توان a'' را به گونه‌ای یافت که $x\equiv_{Mc} a''$ و $a''\downarrow_{Mc} c'b'b$.

یادآوری ویژگی وجود در تئوریهای ساده. برای هر a,b,A عنصر a' پیدا می‌شود که $a\equiv_A a'$ و $a'\downarrow_A b$.

حال داریم: $a''\downarrow_M cc'bb'$.

علت: گفتیم که $a''\downarrow_{Mc} c'b'b$. و نیز (در زیر نشان می‌دهیم که) داریم $a''\downarrow_M c$. از این دو بنا به ویژگی تعدی (یادآوری شده در زیر) نتیجه می‌گیریم که $a''\downarrow_M cc'bb'$.

علت این که $a''\downarrow_M c$. باید نشان دهیم $\mathrm{tp}(a''/Mc)$ روی M نمی‌فرکد. برای این باید نشان دهیم که هیچ $\phi(x,mc)$ در این تایپ روی M نمی‌فرکد. اگر $\phi(a'',mc)$ آنگاه $\phi(b',mb)$. (زیرا $b'b\ \equiv_M\ a''c$.) یعنی باید نشان دهیم که $\phi(x,mb)$ روی M نمی‌فرکد. این درست است زیرا $b\downarrow_M b'$.

ویژگی تعدی: $a \mathop{\downarrow}_A b$ و $c \mathop{\downarrow}_{Aa} b$ اگر و تنها اگر $ac \mathop{\downarrow}_A b$.

بنا به فرضها و بنا به آنچه تا کنون ثابت کرده‌ایم، دنباله‌ی c', c, a'' و دنباله‌ی c', b', a'' هر یک روی M مستقلند. عناصر یک دنباله‌ی مستقل را می‌توان جابه‌جا کرد و دنباله همچنان مستقل می‌ماند. بنابراین

$$c \mathop{\downarrow}_M c'a''(*)$$

و

$$c' \mathop{\downarrow}_M a''b'.(**)$$

بنا به $(*)$ فرمولِ $\phi(x,a'') \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد (این فرمول در $\mathrm{tp}(c/c'a'')$ واقع شده است، بنا به فرضها و نحوه‌ی انتخاب a''.) ادعا می‌کنیم که از این که فرمولِ $\phi(x,a'') \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد می‌توان نتیجه گرفت که $\phi(x,b') \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد.

در ادامه روی اثبات این ادعا متمرکز می‌شویم.

وضعیت پیش رو بدین گونه است: فرمولِ $\phi(x,a'') \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد و $c' \mathop{\downarrow}_M a''b'$ و نیز می‌دانیم که بنا به نحوه‌ی انتخاب، داریم $a'' \equiv_M b'$. در نتیجه‌ی ۷۶ دیدیم که اگر دو عنصر روی یک مدل، همتایپ باشند، عنصری پیدا می‌شود که تعدی رابطه‌ی nc را میان آندو برقرار کند. بنابراین، عنصری مانند e پیدا می‌شود که $nc_M(a'',e)$ و $nc_M(b',e)$. بنا به ویژگیِ وجود، ۶۶، از این که $c' \mathop{\downarrow}_M a''b'$ نتیجه می‌شود که عنصری مانند f هست که $c' \equiv_{Ma''b'} f$ و $e \mathop{\downarrow}_{Ma''b'} f$. پس فرض می‌کنیم که $e \mathop{\downarrow}_{Ma''b'} c'$. حال ادعا می‌کنیم که $\phi(x,e) \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد. این نتیجه از $e \mathop{\downarrow}_{Ma''} c'$ و $nc(a'',e)$ و این که $\phi(x,a'') \wedge \psi(x,c')$ نمی‌فرکد، بنا به نتیجه‌ی ۸۱ حاصل می‌شود.

حال از این که $b' \mathop{\downarrow}_{Ma''} c'$ و $e \mathop{\downarrow}_{Ma''b'} c'$ و تعدی نتیجه می‌شود که $eb' \mathop{\downarrow}_{Ma''} c'$ و از آن نتیجه می‌شود که $b' \mathop{\downarrow}_{Me} c'$.

از این که $b' \mathop{\downarrow}_{Me} c'$ و این که $\phi(x,e) \wedge \psi(x,c')$ نمی‌فرکد و $nc(e,b')$ نتیجه می‌شود که $\phi(x,b') \wedge \psi(x,c')$ روی M نمی‌فرکد. $\square$

۱۱ قضیه‌ی کیم و پیلیْ

بحثمان درباره‌ی تئوری‌های ساده را با قضیه‌ی کیم و پیلی به پایان می‌بریم. بنا به این قضیه، اگر T یک تئوری باشد و در آن یک رابطه‌ی $\square$ داشته باشیم که ویژگی‌های مشابهی (همان‌گونه که در قضیه آمده است) با ویژگیهای رابطه‌ی استقلال نافرکان داشته باشد، آن‌گاه T ساده است و $\square$ دقیقاً همان رابطه‌ی استقلال نافرکان است.

قضیه‌ی ۸۳. فرض کنید T یک تئوری کامل باشد و در آن $\square$ رابطه‌ای میان چندتایی‌های a و مجموعه‌های A, B باشد که ویژگی‌های بیان شده در زیر را داراست. در آن صورت تئوریِ T ساده است و رابطه‌ی $\square$ همان رابطه‌ی ناوابستگیِ فرکان است؛ یعنی $\downarrow = \square$. ویژگی‌های رابطه‌ی $\square$:

۱. ناوردایی تحت اتومرفیسمها. یعنی اگر $a\square_A b$ آنگاه $\sigma(a)\square_{\sigma(A)}\sigma(B)$.

۲. تقارن؛ یعنی اگر $a\square_A b$ آن‌گاه $b\square_A a$.

۳. تعدّی و یکنوایی. یعنی $a\square_A BC$ اگر و تنها اگر $a\square_A B$ و $a\square_{AB} C$.

۴. مشخصه‌ی متناهی؛ یعنی $a\square_A B$ اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعه‌ی متناهیِ b از B داشته باشیم $a\square_A b$.

۵. مشخصه‌ی موضعی؛ یعنی یک کاردینالِ κ داشته باشیم که برای هر a و B زیرمجموعه‌ای مانند B' از B پیدا شود که $|B'| < \kappa$ و $a\square_{B'} B$.

۶. وجود؛ یعنی برای هر چندتاییِ a و مجموعه‌های A و B، چندتاییِ a' پیدا شود که $a' \equiv_A a$ و $a'\square_A B$.

۷. استقلال روی مدلها هرگاه M مدل باشد و

$$a' \square_M a$$
$$b' \square_M b$$
$$a' \square_M b'$$
$$a \equiv_M b$$

آن گاه عنصر c یافت شود که

$$c \equiv_{Ma'} a$$
$$c \equiv_{Mb'} b$$
$$c \square_M a'b'.$$

اثبات. فرض کنید تئوری T و رابطه‌ی $\square$ به شرح بالا داده شده باشند. نخست نشان می‌دهیم که اگر $a \square_A b$ آنگاه $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\!\;\;|}_A^d b$.

پس فرض کنید $a \square_A b$ و $\text{tp}(a/Ab)$ را در نظر بگیرید. برای این که نشان دهیم که این تایپ روی A بخش نمی‌شود بنا به یادآوری زیر باید نشان دهیم که برای دنباله‌ی روی A بازنشناختنیِ (b_i) که b را دربردارد، اجتماع $\bigcup p(x, b_i)$ از تایپهای جزئی سازگار است؛ آن جا که $p(x, y) = \text{tp}(ab/A)$.

ثابت کرده‌ایم که $\text{tp}(a/bA)$ روی A بخش نمی‌شود اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی A بازنشناختنی (b_i) شامل b مجموعه‌ی $\bigcup p(x, b_i) = \{\phi(x, b_i) \| \models \phi(a, b)\}$ سازگار باشد. گرفته‌ایم $p(x, b) = \text{tp}(a/bA)$.

در ادامه، بحث را از مجموعه‌ی پارامترِ A به یک مدل شامل A می‌کشانیم. یعنی یک مدل M شامل A پیدا می‌کنیم و نشان می‌دهیم که $\bigcup p'(x, b_i)$ سازگار است، آن جا که $p'(x, y) = \text{tp}(ab/M)$.

ادّعای ۸۴. مدلی مانند M شامل A پیدا می‌شود که (b_i) دنباله‌ای $\Box$ ـ مرلی روی آن است؛ یعنی این دنباله روی M بازنشناختنی است و نیز برای هر i داریم $b_i \Box_M b_{<i}$.

ادّعای ۸۵. می‌توان فرض کرد که $a \Box_M b$.

با فرض درست بودن دو ادعای بالا، اثبات را این‌گونه ادامه می‌دهیم. اگر عناصرِ a_i را برای $i \in \omega$ چنان پیدا کنیم که a_i برآورنده‌ی $\bigcup_{j \leq i} p'(x, b_j)$ باشد، حکم بنا به فشردگی اثبات خواهد شد. عناصر این‌چنین را به ترتیب زیر می‌یابیم.

بگیرید $a_0 = a$. داریم $\models p'(a_0, b_0)$. فرض کنید a'_1 برآورنده‌ای از $p(x, b_1)$ باشد. داریم

$$a'_1 \Box_M b_1, \quad (*_1)$$

زیرا بنا به ادعا $a \Box_M b$ و از $p'(a'_1, b_1)$ نتیجه می‌شود که $a'_1 b_1 \equiv_M ab$. حال بنا به این که رابطه‌ی $\Box$ ناوردا است، نتیجه می‌گیریم که $a'_1 \Box_M b_1$.

در ادعای دوم گفتیم که

$$a_0 \Box_M b_0 \quad (*_2)$$

و در ادعای اول

$$b_0 \Box_M b_1. \quad (*_3).$$

حال بنا به $*_1, *_2, *_3$ و با کمک‌گیری از ویژگی استقلال روی مدلها یک عنصر a_1 پیدا می‌شود که

$$a_1 \Box_M b_0 b_1$$

و نیز

$$a_1 \equiv_{Mb_1} a'_1$$

و

$$a_1 \equiv_{Mb_0} a$$

یعنی $\models p(a_1, b_0) \cup p(a_1, b_1)$.

بحث بالا را با استقرا می‌توان ادامه داد و بدین ترتیب می‌توان $a_0, a_1, \ldots$ را چنان یافت که a_i برآورنده‌ای از $\bigcup_{j \leq i} p'(x, b_j)$ باشد و نیز $a_i \Box_M b_{\leq i}$. $\Box$

در ادامه ادعاهای ۸۴ و ۸۵ را ثابت می‌کنیم.

اثبات ادعای اول. فرض کنید κ کاردینالی باشد که در ویژگی مشخصه‌ی موضعی برای $\square$ بدان اشاره شده است. دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\omega}$ را به دنباله‌ی $(b_i)_{i\in\kappa}\cup b_\kappa$ می‌گسترانیم که روی A بازنشناختنی است. قبلاً ثابت کرده‌ایم که هر دنباله‌ی بازنشناختنی روی A روی یک مدل شامل A بازنشناختنی است. پس فرض می‌کنیم دنباله‌ی (b_i) روی M_0 بازنشناختنی باشد و $A\subseteq M_0$. حال دنباله‌ی $(b_i)_{i\geq 1}$ روی Mb_0 بازنشناختنی است و از این رو می‌توان آن را بازنشناختنی روی یک مدل $M_1\supseteq M_0b_0$ در نظر گرفت. با همین روش، می‌توان دنباله‌ی (M_i) از مدلها را چنان بدست آورد که $b_{\geq i}$ روی M_i بازنشناختنی باشد و $b_{<i}\subseteq M_i$. حال ویژگی مشخصه‌ی موضعی را به b_κ و مجموعه‌ی $\bigcup M_i\cup b_{<\kappa}$ اعمال می‌کنیم. بنابر این ویژگی، اوردینال $j<\kappa$ پیدا می‌شود که $b_\kappa\square_{M_j}b_{j\leq l<\kappa}$. بگیرید $M=M_j$ و دنباله‌ی $b_j,b_{j+1},\dots$ را جایگزین دنباله‌ی اولیه کنید. این که عناصر این دنباله ویژگی مورد نظر را دارند، از بازنشناختنی بودن دنباله‌ی (b_i) و $b_\kappa\square_{M_j}b_{j\leq l<\kappa}$ نتیجه می‌شود.

اثبات ادعای ۸۵. می‌دانیم که $a\square_A b$. بنا به ویژگی وجود، عنصر a' چنان پیدا می‌شود که $a\equiv_{Ab}a'$ و $a'\square_{Ab}M$. این عنصر را به جای a در نظر می‌گیریم. پس فرض کرده‌ایم $a\square_{Ab}M$ و $a\square_A b$. از این دو بنا به ویژگی یکنوایی و تعدی نتیجه می‌شود که $a\square_M b$. $\square$

تا این جای کار ثابت کرده‌ایم که اگر T و رابطه‌ی $\square$ ویژگی‌های یاده شده را داشته باشند، آنگاه از $a\square_A b$ نتیجه می‌شود که $a\downarrow^d_A b$. در ادامه ثابت می‌کنیم که در یک تئوریِ اینچنان، از $a\downarrow^d_A b$ نیز $a\square_A b$ نتیجه می‌شود.

پیش از اثبات این نکته، توجه کنید پیش‌تر ثابت کردیم که شرط معادل ساده بودن یک تئوری کامل این است که کاردینالی مانند κ پیدا شود که برای هر مدل M و هر عنصرِ a زیرمجموعه‌ای مانند B از M پیدا شود که $|B|<\kappa$ و $a\downarrow_B M$. بنا به فرضها، این ویژگی برای رابطه‌ی $\square$ برقرار است. بنابراین اگر اثبات معادل بودن $\square$ و $\downarrow$ به پایان برسد، سادگیِ T نیز ثابت شده است.

آنچه از اثبات مانده است، این است که نشان دهیم هرگاه $a\downarrow_A b$ آنگاه $a\square_A b$. با کمک ویژگیِ وجود، برای هر کاردینالِ λ می‌توان دنباله‌ی $(b_i)_{i<\lambda}$ را چنان ساخت که $b_i\equiv_A b$ و $b_i\square_A b_{<i}$.

اگر λ باندازه‌بزرگ باشد، می‌توان با کمک لم شلاخ، دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\kappa}$ را چنان یافت که روی A بازنشناختنی باشد و $b'_0 = b$ و نیز این دنباله $\square$مستقل باشد. یادآوری می‌کنیم که κ شاهد ویژگی مشخصه‌ی موضعی برای $\square$ است. از آنجا که $a \downarrow_A b$ و دنباله‌ی $(b'_i)_{i\in\kappa}$ روی A بازنشناختنی و شامل b است، بنا به لم ۴۰ عنصری مانند $a' \equiv_{Ab} a$ پیدا می‌شود که این دنباله روی Aa' بازنشناختنی باشد. مجموعه‌ی $A \cup \{b'_i|i < \kappa\}$ را در نظر بگیرید. بنا به ویژگی مشخصه‌ی موضعی برای $\square$ عنصر $i_0 < \kappa$ پیدا می‌شود که

$$a'\square_{A\{b'_i|i<i_0\}}\{b'_i|i < \kappa\}.$$

می‌توان نوشت

$$a'\square_{A\{b'_i|i<i_0\}}b'_{i_0}b'_{i_0+1}\dots.$$

بنا به ویژگی یکنوایی $a'\square_{A\{b'_i|i<i_0\}}b_{i0}$. نیز فرض کرده‌ایم که $b'_{i0}\square_A\{b'_i|i < i_0\}$. پس بنا به ویژگی تعدی داریم $a'\square_A b'_{i0}$. نیز می‌دانیم که $a'b'_{i0} \equiv_A a'b'_0$ (زیرا دنباله‌ی b'_i روی Aa' بازنشناختنی است)، و از این رو داریم $a\square_A b$

۱۲ خلاصه‌ی بحث

تئوریهای ساده، تئوریهایی هستند که در آنها هیچ فرمولی با «ویژگی درختی» پیدا نشود. معادلاً در این تئوریها هیچ فرمول ϕ و هیچ دنباله‌ی (a_i) و هیچ عددی مانند k یافت نمی‌شود که هر $\phi(x, a_i)$ روی $a_{<i}$ نسبت به k بخش شود. در تئوریهای ساده، اگر فرمول $\phi(x, b)$ روی مجموعه‌ی A بخش شود، همه‌ی دنباله‌های مرلی شامل b شاهد این بخش شدن خواهند بود. این نکته‌ی بسیار مهم در بسیاری اثباتها از جمله اثبات این که درتئوریهای ساده رابطه‌ی ناوابستگی فرکان دارای ویژگی تقارن است استفاده می‌شود. در تئوریهای ساده بخش شدن و فرکیدن با هم معادلند و رابطه‌ی ناوابستگی فرکان دارای ویژگی استقلال روی مدلها است. اگر تئوری‌ای داشته باشیم که در آن رابطه‌ای دوتایی دارای ویژگیهای مشابه ویژگیهای رابطه‌ی $\downarrow$ در تئوریهای ساده باشد، آن گاه آن تئوری ساده است و آن رابطه، همان رابطه‌ی ناوابستگی فرکان خواهد بود.

نمایه