مُدِلْ‌کاملیِ کِشِش‌های*میدانِ ترتیبیِ اعدادِ حقیقی
با توابع پِفافیِ محدودشده
و با تابعِ نمائی

اِیْ. جِیْ. ویلْکی
برگرداننده به فارسی: م. خانی

۱ پیش‌گفتار

یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ را شبه‌جبری می‌خوانیم، هرگاه بشود آن را به‌صورتِ ترکیبهای بولیِ متناهیِ مجموعه‌هائی به شکلِ $\{\alpha \in \mathbb{R}^n | p(\alpha) = 0\}$ و $\{\alpha \in \mathbb{R}^n | q(\alpha) > 0\}$ نمایش داد، که در آن p و q چندجمله‌ای‌هایی هستند n متغیره با ضرایبِ در $\mathbb{R}$. یک تابعِ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را شبه‌جبری می‌خوانیم هرگاه گرافِ آن، که زیرمجموعه‌ای است از $\mathbb{R}^{n+m}$، مجموعه‌ای شبه‌جبری باشد. هندسه‌ی این‌گونه مجموعه‌ها و تابعها (هندسه‌ی شبه‌جبری)، که اکنون موضوعی است به‌باررسیده و فراوان‌مطالعه‌شده، بیش از همه وام‌دارِ آثار بنیادین منطق‌دانی به نام «آلفـرِد تارسکی» [۱] در دهه‌ی ۱۹۳۰ (۱۳۱۰ شمسی) است. در [۱۱] تارسکی ثابت کرده است که تصویرِ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری تحتِ یک تابع شبه‌جبری، مجموعه‌ای است شبه‌جبری (یک مصداقِ آشنا: تصویرِ زیرمجموعه‌ی $\{(a,b,c,x) \in \mathbb{R}^4 | a \neq 0, ax^2 + bx + c = 0\}$ از $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ روی $\mathbb{R}^3$، مجموعه‌ی $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0, b^2 - 4ac > 0\}$ است). بنا به این قضیه، کلاسِ همه‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری، تحتِ تعریف‌پذیریِ مرتبه‌ی اوّل (یعنی، تحت ترکیب‌های بولی،

* (مترجم) اِکسپنشن، و اکستنشنِ یک ساختار در نظریه‌ی مدل، معانی متفاوتی دارند. در اِکسپند کردنِ یک ساختار، به جهانش دست نمی‌زنیم؛ ولی به آن، توابع، روابط و ثوابت جدید می‌افزائیم. با اِکستند کردنِ یک ساختار، «جهانِ» آن را بزرگ‌تر می‌کنیم؛ ولی، به‌آن تابع، رابطه و یا ثابتِ جدیدی نمی‌افزائیم. من در این‌جا، اِکپنشن را «کـِشِش» ترجمه می‌کنم و اکتنشن را «گُسترش». فرهنگستان، هر دو را گسترش ترجمه کرده است. ملایری، برای اولی «اُستِنِش» و برای دومی «گسترش» را پیشنهاد کرده است.

[۱] Alfred Tarski

و سورِ وجودی و عمومی) بسته است. [۲] ازاین‌رو است که منطق‌دانان، آن را قضیه‌ی «حذفِ سور برای ساختار میدانِ ترتیبیِ اعدادِ حقیقی» می‌خوانند. بی‌درنگ پیداست که بستار، درون، و مرزِ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، نیز مجموعه‌هایی شبه‌جبری هستند. [۳] قضیه‌ی تارسکی را نیز می‌توان در اثباتهای استقرایی روی مجموعه‌های شبه‌جبری به کار برد؛ بدین‌ترتیب که با تصویر کردنِ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری روی مجموعه‌های شبه‌جبریِ با ابعادِ پایین‌تر، و با دانستنِ این که حکمی برای مجموعه‌های شبه‌جبریِ با ابعادِ کمتر درست است، می‌توانیم درستیِ آن را برای مجموعه‌ی شبه‌جبریِ موردنظر ثابت کنیم. برای نمونه، این را که هر مجموعه‌ی شبه‌جبریِ کران‌دار را می‌شود مثلث‌بندی کرد (قضیه‌ای از هیروناکا [۴])، می‌توان به همین ترتیب ثابت کرد.

در دهه‌ی ۱۹۶۰ (۱۳۳۹ شمسی) وُیاشِویچ [5]، هندسه‌تحلیلی‌دان، تئوریِ بالا را به بافتارِ توابع تحلیلی تعمیم داده است ([۸]). مجموعه‌های *شبه‌تحلیلی* مشابه مجموعه‌های شبه‌جبری در بالا تعریف می‌شوند؛ با این تفاوت که $p(\bar{x})$ و $q(\bar{x})$ توابعی تحلیلی (و نه لزوماً چندجمله‌ای)، و نمایش‌های بولی تنها در *همسایگی‌های* نقاط مختلف در $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته می‌شوند (نمایش‌های مختلف در اطراف نقاط گوناگون مجاز است). نیز نگاشتها باید سره [۶] باشند (یعنی گرافهاشان شبه‌تحلیلی باشند). تحت این شرط، تصویر یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی، که آن را مجموعه‌ای زیرْتحلیلی [۷] می‌خوانند، شبه‌تحلیلی است، به‌شرطی‌که فضای هدف $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^۲$ باشد. درآغازِ قرن حاضر، مثالهای نقضی یافت شده‌اند از نگاشت‌هایی با بُرد در $\mathbb{R}^n$، برای $n \geq ۳$، که یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی را لزوماً بر یک مجموعه‌ی شبه‌تحلیلی تصویر نمی‌کنند. (اُسگود [۸] در [۸]). وانگهی در ۱۹۶۸ گابریِیلِف [۵] وضعیت را چنین روشن کرده است که کلاسِ مجموعه‌های زیرْتحلیلی، تحت متمّم‌گیری بسته است. قضیه‌ی گابرییلِف [۹] را بر اساس تعریف‌پذیریِ مرتبه‌ی اول می‌توان به صورت زیر بازنوشت.

---

[۲] فرض کنید M مدلی از یک تئوریِ مرتبه‌ی اول باشد و X و Y مجموعه‌هائی باشند که به‌ترتیب به‌گونه‌های زیر تعریف شده‌اند: $X = \{\bar{x} : M \models \phi(\bar{x}, \bar{a})\}$ و $Y = \{\bar{x} : M \models \psi(\bar{x}, \bar{b})\}$ که $\bar{a}$ و $\bar{b}$ پارامترهایی‌اند در توانی از M. آن‌گاه، مجموعه‌ی $X \cap Y$ یه صورت زیر تعریف می‌شود: $X \cap Y = \{\bar{a} : M \models \phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \psi(\bar{x}, \bar{b})\}$ هم‌چنین، تصویرِ مجموعه‌ی $X \times Y$ بر X، با کمکِ سورِ وجودی تعریف می‌شود: $X = \{(\bar{x} : M \models \exists \bar{y} \quad (\bar{x}, \bar{y} \in X \times Y\}$. متمّمِ یک مجموعه نیز، با نقیضِ فرمولِ تعریف‌کننده‌اش به‌دست می‌آید. بنابراین، روابط منطقی، ترکیب‌های بولی و تصویرهای یک مجموعه را روی هر چند مختصِّ اول، به‌دست می‌دهند.

[۳] ساختارِ اعداد حقیقی را به همراه جمع، ضرب، تفریق، ترتیب، صفر و یک در نظر بگیرید. مجموعه‌های بی‌سورتعریف‌شدنی در این ساختار، همان مجموعه‌های شبه‌جبری‌اند. از قضیه‌ی تارسکی برمی‌آید که این ساختار، حذفِ سور دارد؛ بنابراین همه‌ی مجموعه‌های تعریف‌شدنیش شبهِ‌جبری‌اند. بستارِ یک مجموعه‌ی تعریف‌پذیر، خود نیز تعریف‌پذیر است. بنابراین، بستارِ یک مجموعه‌ی شبه‌جبری، نیز شبه‌جبری است. اثبات این حکم، بدون آگاهی از حذف سور، آسان نیست.

[۴] Hironaka

[5] Łojasiewicz

[۶] Proper

[۷] sub-analytic

[۸] Osgood

[۹] Gabrielov

برای هر $m \in \mathbb{N}$ و هر تابعِ تحلیلیِ $f : U \to \mathbb{R}$ که در آن U یک همسایگی باز است از جعبه‌ی بسته‌ی $[۰, ۱]^m$ در $\mathbb{R}^m$، تابعِ $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}) & \text{اگر } \bar{x} \in [۰, ۱]^m \\ ۰ & \text{اگر } \bar{x} \in \mathbb{R}^m - [۰, ۱]^m. \end{cases}$$

گیریم L_{an} گسترشِ زبانِ حلقه‌های مرتب با افزودن نشانِ تابعی برای هر تابعِ $\tilde{f}$ باشد. قضیه‌ی گابریِیلُف معادل این گفته است که برای هر $n \in \mathbb{N}$، هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ را که با یک فرمول منطقی در زبانِ L_{an} تعریف‌شدنی باشد، می‌توان با یک فرمولِ وجودی تعریف کرد؛ منظور فرمولی است به شکلِ $\exists y_۱, \ldots, y_r \quad \phi(x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_r)$ که در آن ϕ بدون سور است (به‌علاوه، کلاس همه‌ی مجموعه‌های کراندارِ از این نوع، دقیقاً همان کلاس زیرمجموعه‌های زیرتحلیلیِ کراندار از $\mathbb{R}^n$ است. در نگاه نخست، شاید کلاس اول غنی‌تر به نظر آید، زیرا در آن تابع تصویر، ارائه شده ضمن سورِ وجودی، به مجموعه‌ای فشرده محدود نشده است. با این حال، علت این که در این رهیافت مجموعه‌ای غیرِ زیرتحلیلی به دست نمی‌آید، تحدید اولیه‌ی توابع تحلیلی است). با استفاده از قضیه‌ی آماده‌سازیِ وایراشتراس، [۱۰] و با به‌کارگیریِ حذفِ سورِ تارسکی برای میدان بسته‌ی حقیقی، وَن‌دِنِ درِیز و دِنِـف [۱۱] برای این صورت از قضیه‌ی گابرلیف، رهیافت نظریه‌ی مدلی نسبتاً سرراستی پیش نهاده‌اند. [۳].

گفتیم که ساختارِ میدانِ ترتیبیِ اعداد حقیقی به‌همراه همه‌ی توابعِ موضعیِ تحلیلی سورها را کامل حذف نمی‌کند، ولی، هر فرمول در آن معادلی دارد کاملاً وجودی (معادلی که تنها سورِ وجودی دارد و در آن پس از سورِ وجودی یک فرمولِ بی‌سور آمده است). ساختارهای این‌چنین را، بنا به نام‌گذاریِ آبراهام رابینسون [۱۲]، *مدل‌کامل* می‌خوانند. مدل‌کامل بودن یک ساختار، به تئوریِ آن بسته است و آن، عبارت است از مجموعه‌ی جمله‌هایی (یعنی فرمولهایی بدون متغیر آزاد) که در آن ساختار درستند. به بیان کلی‌تر، اگر T یک مجموعه‌ی سازگار از جمله‌ها در یک زبانِ L باشد، آن را *مدل‌کامل* می‌خوانیم هرگاه برای هر فرمولِ $\psi(\bar{x})$ در L، یک فرمولِ وجودیِ $\theta(\bar{x})$ در L یافت شود، به طوری که جمله‌ی $\forall \bar{x} \quad (\psi(\bar{x}) \to \theta(\bar{x}))$ از T نتیجه شود. به‌علاوه اگر θ را طوری بتوان گُزید که در آن هیچ سوری رخ ندهد، آنگاه، می‌گوئیم که T سورها را حذف می‌کند [۱۳].

بحث بالا را خلاصه می‌کنیم: ساختارهای $\bar{\mathbb{R}} = \langle \mathbb{R}; +, ., -, ۰, ۱, < \rangle$ و $\mathbb{R}_{an} = \langle \mathbb{R}, \mathcal{F} \rangle$ را که در آن $\mathcal{F}$ مجموعه‌ی تمام توابعِ $\tilde{f}$ به شرح بالاست، درنظرگرفته فرض کنید $\bar{T}$ و T_{an} به‌ترتیب تئوری‌های آنها باشند. آنگاه $\bar{T}$ حذفِ‌سور می‌پذیرد (تارسکی)؛ T_{an} مدل‌کامل است (گابرلیف)؛ و T_{an} سورها را حذف نمی‌کند (اُسگود).

[۱۰] Weierstrass Preparation Theorem

[۱۱] Denef, van den Dries

[۱۲] Abraham Robinson

[۱۳] یا حذف سور می‌پذیرد

هدفِ من در این مقاله، ارائه‌ی دو وَردش [۱۴] از الگوی گابرلییف است. نخست، پاسخ به این پرسشِ طبیعی داده‌ام که تحت چه شرایطی توابعِ تحلیلی‌ای را که برای شناساندن متمّمِ یک مجموعه‌ی زیرتحلیلی مورد نیازند، می‌توان در حلقه‌ی تولیدشده توسط توابع سازنده‌ی آن مجموعه یافت. به بیانِ نظریه‌ی مدلی، برای چه زیرمجموعه‌هایی مثلِ $\mathcal{G}$ از $\mathcal{F}$، ساختارِ $\langle \mathbb{R}, \mathcal{G}\rangle$ مدل‌کامل است. ثابت کرده‌ام که اگر $\mathcal{G}$ یک *زنجیره‌ی پفافی* از تابعها باشد، چنین می‌شود. در زیر این نکته را دقیق‌تر بیان کرده‌ام.

گیریم $m, n \in \mathbb{N}$ و $m, n \geq ۱$، و فرض کنیم $U \subseteq \mathbb{R}^m$ زیرمجموعه‌ای بازی باشد شاملِ جعبه‌ی بسته‌ی $[۰,۱]^m$. نیز فرض می‌کنیم که $G_۱, \ldots, G_l : U \to \mathbb{R}$ توابعی تحلیلی، و $p_{ij} \in \mathbb{R}[z_۱, \ldots, z_{m+i}]$، برای $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq l$، چندجمله‌ای‌هایی باشند به‌گونه‌ای که برای هر $\bar{x} \in U$ داشته باشیم:

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\bar{x}) = p_{ij}(\bar{x}, G_۱(\bar{x}), \ldots, G_i(\bar{x})). \qquad (۱)$$

آنگاه، دنباله‌ی $G_۱, \ldots, G_m$ را یک **زنجیره‌ی پفافی** روی U می‌خوانیم. فرض کنید $F_۱, \ldots, F_n$ تحدیدهای این توابع باشند، یعنی

$$F_i(\bar{x}) = \begin{cases} G_i(\bar{x}) & \text{اگر } \bar{x} \in [۰,۱]^m \\ ۰ & \text{اگر } \bar{x} \in \mathbb{R}^m - [۰,۱]^m. \end{cases} \qquad (۲)$$

اکنون، $C \subseteq \mathbb{R}$ را چنان بگیرید که در ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}; F_۱, \ldots, F_m; c\rangle_{c\in C}$، هر یک از ضرایب در p_{ij} ها، مقدارِ یک ترم (بدون متغیر آزاد) باشد (برای نمونه، می‌توانیم C را مجموعه‌ی همه‌ی این ضرایب بگیریم). این ساختار را با $\tilde{\mathbb{R}}$ و زبان و تئوریِ آن را به‌ترتیب با $\tilde{L}$ و $\tilde{T}$ نشان داده‌ام.

پیداست که $\tilde{L}$ زیرزبانی از L_{an} است و هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ را که با فرمولی در $\tilde{L}$ تعریف‌شدنی باشد، می‌توان با یک فرمول (و ازاین‌رو با یک فرمولِ وجودی) در L_{an} تعریف کرد. در قضیه‌ی زیر فراتر از این را بیان کرده‌ایم.

نخستین قضیه‌ی اصلی. هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ (برای هر $n \in \mathbb{N}$) را که با فرمولی در $\tilde{L}$ تعریف‌شدنی باشد، می‌توان با فرمولی وجودی در $\tilde{L}$ تعریف کرد؛ به بیانِ دیگر، $\tilde{T}$ مدل‌کامل است.

مثال (الف). گیریم $m = l = ۱$، $U = \mathbb{R}$، $G_۱(x_۱) = \exp(x_۱)$، $p_{۱,۱}(z_۱, z_۲) = z_۲$ و $C = \emptyset$. بنا به قضیه‌ی بالا، تئوریِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}; \exp|_{[۰,۱]}\rangle$، مدل‌کامل است. توجه کنید که بنا به فرمولِ ۲، تابعِ $\exp|_{[۰,۱]}$ در خارج از $[۰,۱]$ برابرِ صفر تعریف شده است؛ بااین‌حال، اگر توابعی را بخواهیم که در سرتاسرِ $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^n$ تحلیلی هستند، ترفند زینتی زیر را به کار می‌گیریم.

[۱۴] variation

تابع $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که در آن $x \mapsto \exp(\frac{۱}{۱+x^۲})$. دو ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp|_{[۰,۱]} \rangle$ و $\langle \overline{\mathbb{R}}, e \rangle$ اساساً یکسانند؛ یعنی، مجموعه‌های تعریف‌پذیر در آنها، به‌ویژه آنها که با فرمول‌های وجودی تعریف شده‌اند، یکسانند. بنابراین ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, e \rangle$ مدل‌کامل است.

مثال (ب). گاهی نیز ترفندِ بالا رایگان به کَف می‌آید. گیریم $m = ۱$، $l = ۲$، $U = \mathbb{R}$، $G_۱(x_۱) = \frac{۱}{۱+x^۲}$، $G_۲(x_۱) = \tan^{-۱}(x_۱)$، $p_{۱,۱}(z_۱, z_۲) = ۲z_۱z_۲^۲$، $p_{۲,۱}(z_۱, z_۲, z_۳) = z_۲$، و درنهایت، $C = \emptyset$. ازآن‌جاکه گرافِ تابعِ $G_۱$ (به بیانِ بهتر $F_۱$) خودبه‌خود در ساختارِ $\overline{\mathbb{R}}$ بدون سور تعریف‌شدنی است، بنا به قضیه‌ی بالا تئوریِ ساختارِ $\langle \mathbb{R}, \tan^{-۱}|_{[۰,۱]} \rangle$ مدل‌کامل است. از طرفی تساوی‌های تابعیِ زیر در $\pm\infty$ برقرارند:

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) = \frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}(x)$$

برای $x > ۰$ و

$$\tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) = -\frac{\pi}{۲} - \tan^{-۱}(x)$$

برای $x < ۰$؛ که از آنها به‌همراهِ دو رابطه‌ی

$$\tan^{-۱}(-x) = -\tan^{-۱}(x)$$

و

$$\frac{\pi}{۲} = ۲\tan^{-۱}(۱)$$

نتیجه می‌شود که تئوریِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \tan^{-۱} \rangle$ که در آن $\tan^{-۱}$ به هیچ بازه‌ای محدود نشده است، مدل‌کامل است.

مثال (پ). تا آن‌جاکه می‌دانم، نخستین نتیجه‌ی ازاین‌دست از وِن‌دِن‌دریز [۱۲] است، در اثبات مدل‌کامل بودن ساختارِ

$$\langle \bar{\mathbb{R}}; \sin|_{[۰,۱]}, \exp|_{[۰,۱]}; r \rangle_{r\in\mathbb{R}}.$$

با ترکیبِ زنجیره‌های مثالهای الف و ب و با به‌کارگیری نخستین قضیه‌ی اصلی، می‌توان اثباتِ دیگری برای این قضیه ارائه کرد. (در اثبات وِن‌دِن‌دریز به تابع سینوس *نیاز است*؛ زیرا در آن از سری‌های توانی *مختلط* استفاده شده است و مدل‌کامل بودن، با گرفتن بخشهای حقیقی این گونه توابع در قضیه‌ای مشابه برای توابع تحلیلیِ *مختلطِ* محدود به قُرصِ واحد است. نکته‌ی کلیدی در اثبات این است که توابع مختلطی را که به عنوان ضرایب در قضیه‌ی آماده‌سازی وایراشتراس ظاهر شده‌اند، می‌توان با فرمول‌های وجودی و با استفاده از داده‌های اولیه (و احتمالاً پارامترهای افزون — و از این روست که در اینجا گرفته‌ایم $C = \mathbb{R}$) تعریف کرد؛ جالب است که امکان این امر هنگام استفاده از قضیه‌ی وایراشتراس برای توابعِ تحلیلی حقیقی دانسته نیست.

چه با روشها و ترم‌شناسی نظریه‌ی مدلی یا توابع تحلیلی، قضایای بالا را می‌توان ثابت کرد؛ زیرا در آنها توابع به زیرمجموعه‌ی فشرده‌ای از دامنه محدود شده‌اند، معادلاً (به کمکِ ترفند ذکرشده) در همه‌ی فضا و در بی‌نهایت تحلیلیند. دومین قضیه‌ی اصلی، این محدودیت را از حالتی خاص زدوده است.

دومین قضیه‌ی اصلی. تئوریِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp \rangle$، که در آن $\exp$ تابعِ نمایی معمول $x \to e^x$ است با دامنه‌ی $\mathbb{R}$، مدل‌کامل است.

بدین‌سان، اگر یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ را *شبه‌جبری‌نمایی* [۱۵] بخوانیم هرگاه بشود آن را با ترکیب‌های بولی مجموعه‌هایی به‌گونه‌ی $\{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n : p(\bar{\alpha}) = ۰\}$ و $\{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^n : q(\bar{\alpha}) > ۰\}$ نوشت که در آن p و q توابعِ چندجمله‌ایِ نمایی هستند (یعنی چندجمله‌ای‌هایی هستند بر حسبِ $x_۱, \dots, x_n$ و $e^{x_۱}, \dots, e^{x_n}$ با ضرایب حقیقی، و به بیان کلی‌تر صحیح!)؛ و یک نگاشتِ از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^m$ را شبه‌جبری‌نمائی بخوانیم هرگاه گراف آن چنین باشد؛ و سرآخر یک مجموعه را *زیرشبه‌جبری‌نمائی* [۱۶] بخوانیم هرگاه تصویرِ مجموعه‌ای شبه‌جبری‌نمائی تحتِ یک نگاشت این‌چنین باشد، *آن‌گاه*، دومین قضیه‌ی اصلی معادلِ این گفته است که متمّمِ یک مجموعه‌ی زیرشبه‌جبری‌نمائی، خودْ مجموعه‌ای است زیرشبه‌جبری‌نمائی. همانندِ آنچه درباره‌ی مجموعه‌های شبه‌جبری گفتیم، از این نتیجه می‌شود که کلاسِ مجموعه‌های زیرشبه‌جبری‌نمائی، تحت گرفتن بستار، درون و مرز بسته است. به‌سببِ تکینگی اساسیِ تابعِ نمائی در بی‌نهایت، بعید است بتوان این قضیه را با راهکارهای معمول در هندسه‌ی دیفرانسیل یا هندسه‌ی تحلیلی ثابت کرد. در اثبات ارائه شده در این مقاله، روش‌های نظریه‌ی مدلی برای تحلیلِ صفرهای بزرگِ سامانه‌های معادلاتِ جبری‌نمائی به‌کار رفته‌اند.

پیش از شرحِ طرحِ مقاله، چند نکته را درباره‌ی کارائی [۱۷] یادآور می‌شوم. هدف اصلی تارسکی، تنها اثبات وجود معادلی بدون سور برای هر فرمول در $\bar{L}$ نسبت به $\bar{T}$ نبوده است؛ که او علاوه‌براین، ثابت کرده است که این معادلِ بدون سور با روشی کارا به دست می‌آید. بنابراین تئوریِ $\bar{T}$ تصمیم پذیر است؛ یعنی، الگوریتیمی وجود دارد (و تارسکی آن را ارائه کرده است) که تعیین کند که آیا یک جمله‌ی داده‌شده در $\bar{L}$ در ساختار $\overline{\mathbb{R}}$ درست است یا خیر (عنوانِ آن مقاله هم از همین آمده‌است). نیز تارسکی از درستی نتیجه‌ای مشابه برای ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp \rangle$ پرسیده است. با این که پاسخ به این پرسش، انگیزه‌ی اصلی نگارش مقاله‌ی پیش‌رو بوده است، پنداشتم که پرداختن به کارائی در تک‌تک اثباتها، بحثها را پیچیده و ابهام‌برانگیز کند. از این رو، آن را به مقاله‌ی دیگری با اِیْ جِیْ مَکین‌تایرِ موکول کرده‌ام که در آن نشان داده‌ایم که بحث درباره‌ی کارائی، در رابطه‌ی تنگاتنگ است با حدسِ شانوئل [۱۸] در نظریه‌ی اعدادِ متعالی.

خواننده را برای آشنائی کلی با مفهوم مدل‌کامل بودن، به [۱] ارجاع می‌دهم. در این منبع، معادل‌های

[۱۵] semi-exponential-algebraic
[۱۶] sub-exponential-algebraic
[۱۷] effectivity
[۱۸] Schanuel's Conjecture

گوناگونِ مدل‌کامل بودن بیان شده‌اند (و البته تعریفی که من در این مقاله آورده‌ام، یکی از این معادل‌ها و نه تعریف اصلیِ رابینسون است). فرض کنید T یک مجموعه‌ی سازگار از جمله‌ها در زبانِ L باشد. آن‌گاه، T مدل‌کامل است، اگروتنهااگر، هرگاه $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ مدل‌هایی از T باشند، و $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ (یعنی $\mathfrak{A}$ یک L-زیرساختار از $\mathfrak{B}$ باشد)، آن‌گاه $\mathfrak{A}$ در $\mathfrak{B}$ **بسته‌ی وجودی** [19] باشد. اثباتِ مدل‌کامل بودنِ تئوری‌های مرتبط با دو قضیه‌ی اصلی (درواقع تئوریِ هر ساختاری که از افزودنِ توابع و ثوابت به $\overline{\mathbb{R}}$ به‌دست آید)، بر طبق تعریف یادشده، معادلِ تحقیق این است که هر مجموعه‌ی متناهی از معادلات (با توابعِ زبان) که دارای پاسخی در $\mathfrak{B}$ است، پاسخی نیز در $\mathfrak{A}$ داشته باشد. قضیه‌های اصلی در اینجا با همین ایده ثابت شده‌اند.

در بخش بعدی، این رهیافت را شرح داده، کوشیده‌ام صورتی ساده‌تر و مهارشدنی‌تر به معادلات موردمطالعه ببخشم. پس از ارائه‌ی خلاصه‌ای از قضیه‌های دانسته درباره‌ی متناهی‌بودنِ پاسخ‌های معادلاتِ این‌چنین در بخشِ ۳، در بخشِ‌های ۴ و ۵، به بسط نظریه‌ای پرداخته‌ام برای حلقه‌های نوتری تشکیل شده از جرم‌های دیفرانسیل‌پذیر که برای مدل‌های *دلخواه* (حتی نااستاندارد) از تئوری‌های مناسبی، کارگر افتد. (در نتیجه‌ی ۱۴، با به‌کارگیری این نظریه، اثبات دیگری برای قضیه‌ای از خُوانسکی ارائه کرده‌ام که طبق آن چندگوناهای [20] پِفافی دارای تنها تعدادِ متناهی جزءِ همبند هستند). بخش‌های ۶ و ۷ کمی ملال‌آور شده‌اند. در این بخشها، چندین قضیه‌ی وجودی بسیار مقدماتی (ولی *جهانی*) را از حساب دیفرانسیل، برای مدلهای *دلخواه* از تئوری‌های تحت‌بررسی بسط داده‌ام و این امر به گمانم، بدون ارائه‌ی صریح همه‌ی تعاریف لازم ناممکن آمد. اثباتها با دستکاری‌های جبری فراوان (به‌ویژه مرتبط با ماتریسهای ژاکوبی) درگیرند که از بیان جزئیاتشان، آنجا که به فهم بحث اصلی گزندی وارد نشود، گذشته‌ام.

در همه‌ی نتیجه‌های آمده در بخش‌های ۳ تا ۷ (به جز در گزاره‌ی ۱۳ و نتیجه‌ی ۱۴) تحدید توابع به جعبه‌ی بسته‌ی واحدْ نامربوط است، بنابراین آن‌ها را برای هر دو قضیه‌ی اصلی می‌توان به‌کار گرفت. بااین‌همه، برای رهایی از دشواری‌های (عموماً سطحیِ) ناشی از تحدید توابع، در این بخشها بیشتر روی ساختارهایی متمرکز شده‌ام که شرایطِ نخستین قضیه‌ی اصلی را برمی‌آورند. از این نقطه به بعد، و در مواجهه با پاسخهای بزرگ سیستمهای معادلات تحت بررسی، اثباتها واگرا شده‌اند. در بخش ۸ اثبات نخستین قضیه‌ی اصلی بر همین پایه انجام پذیرفته است. در بخش‌های ۹ تا ۱۱ به اثبات دومین قضیه‌ی اصلی پرداخته شده است. این بخش‌ها را می‌توان جداگانه خواند. در آغازِ هریک نتیجه‌های مورد نیاز از بخش‌های پیشین را بازگو کرده‌ام.

پاسخ به پرسشِ تارسکی درباره‌ی تابعِ نمائی حقیقی، موضوع مقالاتِ بسیاری بوده است. به‌جز آن‌ها که پیش‌تر نام بردم، می‌توان به آثار پیشگامانه‌ی دان [21] (در [۲]) و وُلترِ [22] (در [۱۵]) اشاره کرد. نامساوی‌هایی را که در اثبات مدل‌کاملیِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp \rangle$ به‌کار گرفته‌ایم می‌توان تعمیمِ قضیه‌ی کران‌بندیِ دان

[19] existentially closed
[20] variety
[21] Dahn
[22] Wolter

(در [۲]) به بیش از یک متغیر دانست.

۲ مقدمات اثبات نخستین قضیه‌ی اصلی

از نمادهای $\tilde{K}$ و $\tilde{k}$ برای نمایش $\tilde{L}$ ـ ساختارهای به ترتیب دارای جهانهای K و k استفاده کرده‌ام. گاهی میدان، یا میدانِ مرتبی را جهان آن K یا k است، با همین نمادها نشان داده‌ام.

هرگاه $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$، با $\tilde{L}_k$ (به‌ترتیب با $\bar{L}_k$) گسترش بدست آمده از زبانِ $\tilde{L}$ (به‌ترتیب $\bar{L}$) را با افزودن ثابت برای هر عنصرِ k بدان نشان داده‌ام. به‌همین‌ترتیب، کشش ساختارِ $\tilde{K}$ را به زبان $\tilde{L}_k$ با $\tilde{K}^+$ نشان داده‌ام. به رسمِ معمول، میانِ نمادهای منطقیِ زبان و تعبیرهاشان در ساختارها تمایزی قائل نشده‌ام. به‌ویژه، نمادِ F_i را که در بخشِ ۱، برای نمایشِ توابع از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ معرفی شد، هم به عنوان یک نشان تابعی در زبانِ $\tilde{L}$ و هم به عنوان تابعی از K^n به K، در هر $\tilde{L}$ ـ ساختارِ K استفاده کرده‌ام که تعبیرِ این نمادِ تابعی است.

از رابطه‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که برای $i = ۱, \ldots, l$ و $j = ۱, \ldots, m$ و $n \geq ۱$،

۳. تابعِ F_i در جعبه‌ی بازِ $(۰, ۱)^m$ به تعداد n بار مشتق‌پذیر است.

۴. برای هر $\bar{x} \in (۰, ۱)^m$ داریم

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = p_{i,j}(\bar{x}, F_۱(\bar{x}, \ldots, F_i(\bar{x}))$$

.

موارد ۳ و ۴ در بالا (با به‌کارگیری مجموعه‌ی ثوابتِ C) با جمله‌هایی در زبانِ $\tilde{L}$ و در تئوریِ $\tilde{T}$ بیان‌شدنی هستند؛ ولی این را که هر تابعِ F_i محدودشده به $(۰, ۱)^m$ دارای یک ادامه‌ی تحلیلی G_i است با یک همسایگی باز از $(۰, ۱)^m$ به عنوان دامنه، در این زبان قابل بیان نیست. همان‌گونه که از توضیحات پس از مثالِ پ برمی‌آید، از استفاده از این حقیقت در اثبات گزیری نیست؛ با این حال، نتایجی از آن، مانند نتیجه‌ی زیر، را می‌توان در زبان مرتبه‌ی اول نیز بیان کرد.

فرض کنید $S \subseteq \{۱, \ldots, m\}$ و برای هر $j \in S$ داشته باشیم $a_j \in \{۰, ۱\}$. توابع $F_i^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ را به‌صورت $F_i^*(x_۱, \ldots, x_m) = F_i(x'_۱, \ldots, x'_m)$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$x'_j = \begin{cases} x_j & j \notin S \text{ اگر} \\ a_j & .j \in S \text{ اگر} \end{cases}$$

هم‌چنین فرض کنید

$$J_j = \begin{cases} (۰, ۱) & j \notin S \text{ اگر} \\ \mathbb{R} & j \in S \text{ اگر} \end{cases}$$

اکنون، از تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که (برای i و j و n به صورت بالا)

۵. F_i^* روی مجموعه‌ی بازِ $\prod_{j=1}^{m} J_j$ به تعداد n بار مشتق‌پذیر است.

۶. برای هر $\bar{x} \in \prod_{j=1}^{m} J_j$ داریم

$$\frac{\partial F_i^*}{\partial x_j}(\bar{x}) = \begin{cases} p_{i,j}(x'_1, \ldots, x'_m, F_1^*(\bar{x}, \ldots, F_i^*(\bar{x})), & \text{اگر } j \notin S \\ 0 & \text{اگر } j \in S \end{cases}$$

موارد بالا در زبان $\tilde{L}$ قابل بیان و از این رو بخشی از تئوریِ $\tilde{T}$ هستند.

بنا بر توضیحات در بخش ۱، نخستین قضیه‌ی اصلی، معادل این است که هرگاه $\tilde{k}, \tilde{K} \models \tilde{T}$ و $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$ و χ یک جمله‌ی وجودی در $\tilde{L}_k$ باشد که $\tilde{K}^+ \models \chi$، آنگاه $\tilde{k}^+ \models \chi$. هم‌چنین، χ را می‌توان به گونه‌ی زیر فرض کرد:

$$\exists x_1, \ldots, x_r \quad \bigwedge_{s=1}^{n} \tau_s = 0$$

که در آن τ_s یا ترمی است در $\bar{L}_k$، و یا به‌گونه‌ی $F_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) - x_{i_{m+1}}$ است. در توجیه فرض هم از معادل‌گیری‌های منطقی استفاده شده است، هم از این نکته که در $\bar{T}$ فرمول‌های $x \neq y$ و $x < y$ به‌ترتیب با فرمول‌های $\exists z(y-x).z - 1 = 0$ و $\exists z(y-x).z^2 - 1 = 0$ معادلند و هم از باز کردن ترمهای پیچیده به وسیله‌ی متغیرهای جدید (مثلاً نوشتن فرمول $\tau(\sigma) = 0$ به صورت $\exists x(\sigma - x) = 0 \wedge \tau(x) = 0$).

اکنون توجه کنید که در $\tilde{T}$، فرمولِ

$$F_i(y_1, \ldots, y_m) - y_{m+1} = 0 \wedge y_j \geq 1$$

که در آن (y_i ها یا متغیرند و یا ثابت و) $1 \leq j \leq m$ و y_j یک متغیر است، با فرمولِ زیر معادل است:

$$(y_j > 1 \wedge y_{m+1} = 0) \vee (F_i(y_1, \ldots, y_m)(y_j/1) - y_{m+1} = 0 \wedge y_j = 1)$$

و نیز، معادلی مانندِ بالا برای فرمولی مشابه فرمول بالا با $0 \leq y_j$ به‌جای $y_j \geq 1$ برقرار است. پس از به‌کارگیریِ پی‌درپیِ این معادل‌های منطقی، می‌شود χ را به گونه‌ی زیر فرض کرد

$$\exists x_1, \ldots, x_r \quad \bigwedge_{s=1}^{n} \chi_s(x_1, \ldots, x_r)$$

که در آن، هر $\chi_s(x_1, \ldots, x_s)$ به صورت $\tau(x_1, \ldots, x_r) = 0$ است برای یک ترمِ $\tau(x_1, \ldots, x_r)$ در $\bar{L}_k$ (یعنی، یک چندجمله‌ای درk بر حسبِ $x_1, \ldots, x_k$)؛ و یا به‌گونه‌ی زیر است

$$\bigwedge_{j \notin S} 0 < x_{i_j} < 1 \wedge F_i(x'_{i_1}, \ldots, x'_{i_{m+1}}) = 0$$

که در آن S زیرمجموعه‌ای از $\{۱,\dots,m\}$ است و $۱ \le i_۱,\dots,i_{m+۱} \le r$ و

$$x'_{i_j} = \begin{cases} x_{i+j} & \text{اگر } j \notin S \\ \text{۱ یا ۰} & \text{اگر } j \in S. \end{cases}$$

اثباتِ نخستین قضیه‌ی اصلی، با استقراست روی تعدادِ فرمولهای χ_s که در χ پدیدار می‌شوند. در تعریف زیر، فرمولهای χ_S را به طور ملموس‌تر شناسانده‌ایم.

تعریف ۱. فرض کنید $n, r \in \mathbb{N}$.

۱. دنباله‌ی $\langle \sigma_۱,\dots,\sigma_n \rangle$ از ترم‌های با متغیرهای $x_۱,\dots,x_n$ در زبان $\tilde{L}$ را یک (n,r) ـ دنباله می‌خوانیم هرگاه

الف) هر ترمِ σ_s برای $s = ۱,\dots,n$، به صورتِ $F_i(y_۱,\dots,y_m)$ باشد برای یک $i \in \{۱,\dots,l\}$ و یک انتخاب برای عناصر $y_۱,\dots y_m \in \{۰,۱,x_۱,\dots,x_r\}$؛

ب) اگر همان‌گونه که در الف آمده است، داشته باشیم $\sigma_s = F_i(y_۱,\dots,y_m)$ که در آن $۱ \le s \le n$ و $۱ < i \le l$ و $s > ۱$، آنگاه داریم $\sigma_t = F_{i-۱}(y_۱,\dots,y_m)$، برای یک t از میان $\{۱,\dots,s\}$.

۲. به متغیرهایی که در ترمی از یک (n,r) ـ دنباله‌ی $\overline{\sigma}$ پدیدار شده‌اند، σ ـ بسته می‌گوئیم.

روشن است که برای هر $r' \ge r$، هر (n,r) ـ دنباله‌ی σ یک (n,r') ـ دنباله نیز هست (با همان مجموعه‌ی متغیرهای $\bar{\sigma}$ ـ بسته)؛ همچنین هر بخش ابتداییِ یک (n,r) ـ دنباله، یک (n',r) ـ دنباله، برای یک انتخابِ مناسبِ $n' \le n$ است. نیز، هر دنباله‌ای را که در شرط الف صدق کند، می‌توان با تغییر ترتیب ترمها یا افزودن ترمهای جدید تبدیل به یک (n',r) ـ دنباله کرد، برای یک $n' \in \mathbb{N}$. فرض کنید $\tilde{K} \models \tilde{T}$.

تعریف ۲. فرض کنید $\overline{\sigma} = \langle \sigma_۱,\dots,\sigma_n \rangle$ یک (n,r) ـ دنباله باشد. *دامنه‌ی* $\overline{\sigma}$ در $\tilde{K}$ را با $D^r(\overline{\sigma},\tilde{K})$ نشان می‌دهیم و آن را برابرِ $\Pi_{i=۱}^r I_i$ تعریف می‌کنیم که در آن

$$I_i = \begin{cases} \{x \in K : \tilde{K} \models ۰ < x < ۱\} & \text{اگر } x_i \text{، } \sigma \text{ ـ بسته باشد} \\ K & \text{وگرنه.} \end{cases}$$

روشن است که $D^r(\sigma,\tilde{K})$ یک زیرمجموعه‌ی بازِ تعریف‌پذیر (در $\tilde{K}$) از K^r است. حال، فرض کنید که $\tilde{k} \models \tilde{T}$ و $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$.

تعریف ۳. گیریم $\bar\sigma = \langle \sigma_۱, \dots, \sigma_n\rangle$ یک (n,r) ـ دنباله باشد؛ با $M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$ حلقه‌ی همه‌ی توابع $f : D^r(\bar\sigma, \tilde K) \to K$ را نشان داده‌ام که برای آنها یک چندجمله‌ایِ

$$p(X_۱, \dots, X_r, Y_۱, \dots, Y_n) \in k[X_۱, \dots, X_r, Y_۱, \dots, Y_n]$$

هست که

$$\text{(۷)} \qquad \text{برای هر } \bar\alpha \in D^r(\sigma, \tilde K)\text{،} \quad f(\bar\alpha) = p(\bar\alpha, \sigma_۱(\alpha), \dots, \sigma_n(\alpha)).$$

از آن‌چه پیش از تعریفِ ۱ گفتیم، لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۴. برای اثبات نخستین قضیه‌ی اصلی کافی است نشان دهیم که برای هر $\tilde k, \tilde K \models \tilde T$ که در آن $\tilde k \subseteq \tilde K$، و برای هر $n, r \in \mathbb{N}$ و هر (n,r) ـ دنباله‌ی σ، داریم: هر دسته از توابعِ $g_۱, \dots, g_q \in M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$، اگر صفر مشترکی در $D^r(\sigma, \tilde K)$ داشته باشند، آنگاه صفرِ مشترکی نیز در $D^r(\sigma, \tilde k)$ دارند (واضح است که $D^r(\sigma, \tilde k) \subseteq D^r(\tilde\sigma, \tilde K)$).

با ساده‌سازی‌های مشابه قبل، چندجمله‌های p_i را در نمایش g_i رابطه‌ی ۷ می‌توان یا مستقل از Y_i ها فرض کرد و یا به شکل $Y_i - X_j$؛ برای $i = ۱, \dots, n$ و $j = ۱, \dots, r$. از آنجا که کار با *حلقه‌های* متشکل از توابع آسان‌تر است، در ادامه به تثبیت برخی ویژگی‌های مقدماتی این گونه حلقه‌ها پرداخته‌ام؛ با این حال، مشاهده‌ی ذکرشده، همچنان در ادامه (به طور پنهان) نقش بازی خواهد کرد.

برای ادامه‌ی این بخش، فرض کرده‌ایم که $\tilde k, \tilde K \models \tilde T$ و $\tilde k \subseteq \tilde K$.

گیریم $n, r \in \mathbb{N}$ و فرض می‌کنیم $\bar\sigma = \langle \sigma_۱, \dots, \sigma_n\rangle$ یک (n,r) ـ دنباله باشد، و $g \in M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$. بنا به موردِ ۵ و توضیحات پس از موردِ ۶، تابعِ g در دامنه‌ی $D^r(\bar\sigma, \tilde K)$ تابعی است C^∞ در تعبیرِ $\tilde K$. یعنی در مُدلِ $\tilde K$ همه‌ی گزاره‌های معمول $\epsilon - \delta$، تضمین‌کننده‌ی وجود و پیوستگی مشتق جزئی q اُم برای تابع g، برای هر $q \in \mathbb{N}$، در تمام نقاط دامنه‌ی $D^r(\sigma, \tilde K)$، برقرارند. همچنین، مشتقهای جزئیِ تابعِ g، بنا به مورد ۶ در بالا و قسمتِ ۱.ب در تعریفِ ۲.۱ در حلقه‌ی $M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$ واقع شده‌اند. ازاین‌رو، حلقه‌ی یادشده، حلقه‌ای است دیفرانسیلی. این حلقه، حوزه‌ی صحیح نیز هست؛ علت این است که حلقه‌ی $M^r(\tilde{\mathbb{R}}, \tilde{\mathbb{R}}, \bar\sigma)$ حوزه‌ی صحیح است (زیرا حلقه‌ای است از توابع تحلیلی روی یک مجموعه‌ی بازِ هم‌بند) و این ویژگیِ مرتبه‌ی اول، از حلقه‌ی یادشده به حلقه‌ی $M^r(\tilde K, \tilde K, \bar\sigma)$ قابل‌انتقال است (برای این انتقال، نمایش ارائه‌شده در رابطه‌ی (۷) را برای عناصرِ حلقه‌ی $M^r(\tilde K, \tilde K, \bar\sigma)$ درنظرگرفته روی ضرایب چندجمله‌های p سور می‌زنیم)، که $M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$ را به عنوان زیرحلقه دارد.

گیریم $p, q \le r$ و $۱ \le i_۱ < \dots < i_q \le r$. برای توابعِ $g_۱, \dots, g_p \in M^r(\tilde k, \tilde K, \bar\sigma)$ ماتریس

ژاکوبی زیر از عناصرِ حلقه‌ی $M^r(\tilde{k},\tilde{K},\bar{\sigma})$ را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_۱}{\partial x_{i_۱}} & \cdots & \frac{\partial g_۱}{\partial x_{i_q}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_{i_۱}} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial x_{i_q}} \end{pmatrix}$$

در ادامه، ماتریس بالا را با $\frac{\partial(g_۱,\dots,g_p)}{\partial(x_{i_۱},\dots,x_{i_q})}$ نشان داده‌ام. توجه کنید که اگر $p=q$، آنگاه

$$\det\big(\frac{\partial(g_۱,\dots,g_p)}{\partial(x_{i_۱},\dots,x_{i_q})}\big)\in M^r(\tilde{k},\tilde{K},\bar{\sigma}).$$

هرگاه $p=q=r$، به‌جای $\det\big(\frac{\partial(g_۱,\dots,g_p)}{\partial(x_{i_۱},\dots,x_{i_q})}\big)$ از نمادِ $J(g_۱,\dots,g_r)$ بهره جُسته‌ام.

تعریف ۵. فرض کنید $n,r\in\mathbb{N}$ و $\bar{\sigma}$ یک (n,r) ـ دنباله باشد. نقطه‌ی $P\in K^r$ را $(\tilde{k},\bar{\sigma})$ ـ *تعریف‌پذیر* می‌خوانیم، هرگاه توابعی چون $g_۱,\dots,g_r$ در حلقه‌ی $M^r(\tilde{k},\tilde{K},\bar{\sigma})$ موجود باشند، به طوری که

۱. $P\in D^r(\bar{\sigma},\tilde{K})$،

۲. $g_۱(P)=\dots=g_r(P)=۰$، و

۳. $J(g_۱,\dots,g_r)(P)\neq ۰$.

مثال (ت). دنباله‌ی تک‌عضوی $\emptyset$ را می‌توان برای هر $r\in\mathbb{N}$ یک $(۰,r)$ ـ دنباله دانست. داریم $D^r(\emptyset,\tilde{K})=K^r$، و می‌توانیم $M^r(\tilde{k},\tilde{K},\emptyset)$ را با حلقه‌ی $k[x_۱,\dots,x_r]$ از چندجمله‌ای‌ها یکسان بگیریم. نقطه‌ی $P\in k^r$ را به‌صورت $P=\langle p_۱,\dots,p_r\rangle$ در نظر بگیرید. برای $i=۱,\dots,r$ تعریف کنید $g_i(x_۱,\dots,x_r)=x_i-p_i$. دراین‌صورت داریم

$$g_۱,\dots,g_r\in M^r(\tilde{k},\tilde{K},\emptyset)،$$
$$g_۱(P)=\dots,g_r(P)=۰،$$
$$J(g_۱,\dots,g_r)(P)=۱\neq ۰؛$$

یعنی P نقطه‌ای $(\tilde{k},\emptyset)$ ـ تعریف‌پذیر است در K^r.

برعکس، اگر Q نقطه‌ای $(\tilde{k},\emptyset)$ ـ تعریف‌پذیر در K^r باشد، بنا جبرِ مقدماتی، هر درایه‌ی آن روی میدانِ k جبری است، و ازآن‌جا که k در K بسته‌ی جبری است (هر یک مدلی است از $\bar{T}$) داریم $Q\in k^r$.

مثال (ث). مثال بالا را تعمیم می‌دهیم. فرض کنید $\bar{\sigma}$ یک (n,r) ـ دنباله باشد، که در آن $n,r\in\mathbb{N}$ و $s\geq ۱$. حال $\bar{\sigma}$ را به عنوان یک $(n,r+s)$ ـ دنباله در نظر بگیرید. روشن است که

$D^{r+s}(\bar{\sigma}, \tilde{K}) = D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K}) \times K^s$ (نکا ۲,۱,۲ و ۲,۲). حلقه‌ی $M^{r+s}(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ را با میدانِ $M^{r+s}(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})[x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}]$ از چندجمله‌ای‌های روی $M^{r+s}(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ یکسان بگیرید. حال اگر نقطه‌ی $\langle P, Q\rangle$ که در آن $P \in D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$ و $Q \in K^s$، نقطه‌ای $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی باشد، بنا به جبر مقدماتی، هر درایه از Q، روی زیرمیدانِ $k(p_1, \ldots, p_r, \sigma_1(P), \ldots, \sigma_n(P))$ از K جبری است (گرفته‌ایم $P = \langle p_1, \ldots, p_r\rangle$).

در مثالِ (ت) دیدیم که در K^r یک نقطه $(\tilde{k}, \emptyset)$ ـ تعریف‌پذیر است، اگروتنهااگر که در k^r واقع شده باشد. در واقع، همان طور که در لم زیر آمده است، فراتر از این درست است.

لمِ اصلی ۶. برای هر $n, r \in \mathbb{N}$ و هر (n, r) ـ دنباله‌ی $\bar{\sigma}$، هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در K^r، واقع در k^r است.

در ادامه، همچنین لم زیر را ثابت خواهیم کرد.

لم ۷. گیریم σ یک (n, r) ـ دنباله باشد برای $n, r \in \mathbb{N}$. اگر تابعِ $g \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ در نقطه‌ی $P \in D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$ صفر شود ($g(P) = 0$)، آنگاه، نقطه‌ای $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌پذیر مانند $\langle Q_0, Q_1\rangle$ وجود دارد که در آن $Q_0 \in D^r(\overline{\sigma}, \tilde{K})$ به‌گونه‌ای است که $g(Q_0) = 0$؛ و داریم $Q_1 \in K^s$، برای یک $s \in \mathbb{N}$. (با مثال ت مقایسه شود.)

حال می‌توانیم نخستین قضیه‌ی اصلی را بر اساس لمهای ۴ و ۶ و ۷ ثابت کنیم. کافی است تابعِ g را در لم ۷ برابر با $\sum_{i=1}^{q} g_i^2$ بگیریم که در آن $g_1, \ldots, g_q$ همانند توابعی هستند که در لم ۴ آمده‌اند.

لم اصلی را در زیر به دو لم، با اثباتهایی کاملاً متفاوت، گسسته‌ایم.

لم ۸. گیریم $n, r \in \mathbb{N}$ و $\bar{\sigma}$ یک (n, r) ـ دنباله باشد. فرض کنید برای هر $s \geq r$، و هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف پذیرِ $\langle p_1, \ldots, p_s\rangle$ در K^s، عنصری مانند B در k موجود باشد، به طوری که $\tilde{K} \models \bigwedge_{i=1}^{s} -B < p_i < B$. آنگاه، هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در K^r در k^r واقع است.

لم ۹. گیریم $n, r \in \mathbb{N}$ و فرض کنیم $\sigma' = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_{n+1}\rangle$ یک $(n+1, r)$ ـ دنباله باشد و $\bar{\sigma} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle$. اگر برای هر $s \geq r$، هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در K^s واقع در k^s باشد، آنگاه، برای هر $s \geq r$ و هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma}')$ـ تعریف‌شدنیِ $\langle p_1, \ldots, p_s\rangle$ در K^s، عنصری مانند B در k موجود است، به طوری که $\tilde{K} \models \bigwedge_{i=1}^{s} -B < p_i < B$.

لمِ اصلی را می‌توان با استقرا روی n (برای همه‌ی مقدارهای r) از لم‌های ۸ و ۹ نتیجه گرفت. قدم نخست این استقرا در مثال ت صورت پذیرفته است.

تااین جا کار اثبات لم اصلی را به اثبات لمهای ۷ و ۸ و ۹ تقلیل داده‌ایم. لم‌های ۷ و ۸ را می‌شود با اعمال اصلاحاتی جزئی بر ترفندهای بسط‌داده‌شده در [۱۴] ثابت کرد، ولی ترجیح من استنتاج آنها از

تئوری کلّیِ حلقه‌های دیفرانسیلیِ نوتری است که بسط آن را در بخش ۴ آورده‌ام. لمهای ۷ و ۸ را به‌ترتیب در بخشهای ۵ و ۷ ثابت خواهم کرد. این واقعیت که F_i ها دارای ادامه‌ای تحلیلی به مجموعه‌ای باز و شامل $[۰,۱]^m$ هستند، در این اثباتها نقشی بازی نخواهد کرد. ازاین‌رو، در حالاتی که لم ۹ به طور واضح برقرار باشد (مثلاً هرگاه که $\tilde{K}$ گسترشی همپایان [۲۳] از $\tilde{k}$ است)، برای *توابع نامحدود* نیز می‌توان نوعی مدل‌کاملی استنباط کرد. بخش ۷ به چنین نتیجه‌ای اختصاص داده شده است. در بخشِ ۸ به اثباتِ ۹ پرداخته‌ام، که در آن از نتایج وَندِن دِریز در [۸]، درباره‌ی نظریه‌ی مدلِ مجموعه‌های متناهیاً زیرتحلیلی استفاده جسته‌ام. در سرتاسرِ این مقاله، تکیه‌ی سنگینی بر نتایج خُوانسکی [۶] درباره‌ی توابعِ پِفافی شده است. نتایج مورد نیاز از دو مقاله‌ی ذکر شده به همراه نتایجی بلافاصله از آنها در بخش بعد شرح داده شده‌اند.

۳ نتایج خوانسکی و وندن‌دریز

گزاره ۱۰ (خُوانسکی [۶]). فرض کنید $h_۱,\ldots,h_l$ زنجیره‌ای باشد پفافی از توابع تعریف‌شده روی $\mathbb{R}^{n+m}$، و داشته باشیم $g_۱,\ldots,g_m \in \mathbb{R}[x_۱,\ldots,x_{m+n},h_۱,\ldots,h_l]$ (که در آن تابع $x_i :\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$، تابع تصویرْ بر مختص i اُم است). در این صورت، عددِ طبیعیِ N وجود دارد، به طوری که برای هر $Q \in \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی زیر، همواره بیشینه دارای N عضو است

$$\{P \in \mathbb{R}^m | g_۱(P,Q) = \ldots, g_m(P,Q) = ۰, \det\big(\frac{\partial(g_۱,\ldots,g_m)}{\partial(x_۱,\ldots,x_m)} \neq ۰\big)\}.$$

احتمالا خواننده خود به این مشاهده رسیده است که هر بختی برای اثبات لم ۶ به گزاره‌ای از این دست وابسته است. در واقع، نسخه‌ای از این گزاره مورد نیاز ماست که در آن به جای $\mathbb{R}^{n+m}$ از $\Pi_{i=۱}^{m+n} J_i$ استفاده شده باشد؛ آنجا که هر J_i یا برابر است با $\mathbb{R}$ و یا $(۰,۱)$. این اصلاح را هم با بازنگری در اثبات خوانسکی برای این گزاره می‌توان حاصل کرد، و هم به روش جایگزین زیر (منجر به نتیجه‌ی ۱۱).

فرض کنید $h_۱,\ldots,h_l$ یک زنجیره‌ی پفافی روی $\Pi_{i=۱}^{m+n} J_i$ باشد. برای $i = ۱,\ldots,m+n$، توابع $\alpha_i, \beta_i : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ را چنین تعریف کنید:

$$\alpha_i(\bar{x}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } j_i = \mathbb{R} \\ \frac{۱}{\pi(۱+x_i)^۲} & \text{اگر } j_i = (۰,۱) \end{cases}$$

$$\beta_i(\bar{x}) = \begin{cases} x_i & \text{اگر } j_i = \mathbb{R} \\ \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}.\tan^{-۱}(x_i) & \text{اگر } j_i = (۰,۱) \end{cases}$$

[۲۳] cofinal extension

نگاشتِ $\bar{\beta}: \bar{x} \to \langle \beta_۱(\bar{x}), \ldots, \beta_{m+n}(\bar{x}) \rangle$ یک دوسوئیِ تحلیلی است از $\mathbb{R}^{m+n}$ به $\Pi_{i=۱}^{m+n} J_i$؛ بنابراین، برای $i = ۱, \ldots, l$، توابع $h_i \circ \beta : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ در سرتاسر فضای $\mathbb{R}^{m+n}$ تعریف شده و تحلیلی هستند. با به‌کارگیریِ قاعده‌ی زنجیری (و با توجه به مثالِ ب)، دنباله‌ی

$$\alpha_۱, \beta_۱, \ldots, \alpha_{m+n}, \beta_{m+n}, h_۱ \circ \bar{\beta}, \ldots, h_l \circ \bar{\beta}$$

زنجیره‌ای پفافی روی $\mathbb{R}^{m+n}$ است.

گیریم M حلقه‌ی $\mathbb{R}[x_۱, \ldots, x_{m+n}, h_۱, \ldots, h_l]$ از توابع تعریف شده روی $\prod_{i=۱}^{m+n} J_i$ و M^* حلقه‌ی $\mathbb{R}[x_۱, \ldots, x_{m+n}, \alpha_۱, \ldots, \alpha_{m+n}, \beta_۱, \ldots, \beta_{m+n}, h_۱ \circ \bar{\beta}, \ldots, h_l \circ \bar{\beta}]$ از توابع تعریف شده روی $\mathbb{R}^{m+n}$ باشد. نیز گیریم $g_۱, \ldots, g_m \in M$ و فرض می‌کنیم نقاط $P \in \prod_{i=۱}^{m} J_i$ و $Q \in \prod_{i=m+۱}^{m+n} J_i$ در دو شرط زیر صدق کنند

$$g_۱(P, Q) = \ldots = g_m(P, Q) = ۰$$
$$\det\left(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_۱)}{\partial(x_۱, \ldots, x_m)}\right)(P, Q) \neq ۰.$$

با تعریفِ $\langle P', Q' \rangle = \bar{\beta}^{-۱}(P, Q)$، داریم $g_۱ \circ \bar{\beta}, \ldots, g_m \circ \bar{\beta} \in M^*$ و $g_۱ \circ \bar{\beta}(P', Q') = \ldots, g_m \circ \bar{\beta}(P', Q') = ۰$. با چند محاسبه‌ی ساده و با به‌کارگیریِ قاعده‌ی زنجیری داریم

$$\left(\frac{\partial(g_۱ \circ \bar{\beta}, \ldots, g_m \circ \bar{\beta})}{\partial(x_۱, \ldots, x_m)}\right)(P, Q) = \left(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_m)}{\partial(x_۱, \ldots, x_m)}\right)(P, Q) \times \left(\frac{\partial(\beta_۱, \ldots \beta_m)}{\partial(x_۱, \ldots, x_m)}\right)(P', Q') \qquad (*)$$

نیز می‌دانیم که

$$\det\left(\frac{\partial(\beta_۱, \ldots \beta_m)}{\partial(x_۱, \ldots, x_m)}\right)(P', Q') = \prod_{i=۱}^{m} \alpha_i(P', Q') \neq ۰$$

از این رو، دترمینانِ عبارتِ سمت چپ در تساویِ (*)، ناصفر است. بنابراین P' تنها به P بسته است و Q' تنها به Q و بنا به گزاره‌ی ۱۰ داریم:

نتیجه‌ی ۱۱. گزاره‌ی ۱۰ برای $\prod_{i=۱}^{m} J_i$ به‌جای $\mathbb{R}^{m+n}$ نیز برقرار است؛ که در آن $J_i = \mathbb{R}$ یا $J_i = (۰, ۱)$.

این حقیقت که کران بالای N مستقل از Q است، در انتقال نتایج یاد شده به وضعیت موردمطالعه‌ی ما مورد استفاده قرار می‌گیرد. جزئیات آسان اثبات نتیجه‌ی بعدی به خواننده واگذار شده است.

نتیجه‌ی ۱۲. گیریم $\bar{\sigma}$ یک (n, r_1+r_2) ـ دنباله باشد، برای یک $n, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ و فرض کنیم $\tilde{k}, \tilde{K} \models \tilde{T}$، $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$ و $g_1, \dots, g_{r_1} \in M^{r_1+r_2}(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$. آن‌گاه، عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که برای هر $Q \in K^{r_1}$، مجموعه‌ی زیر دارای بیشینه N عضو است.

$$\{P \in K^{r_1} | \langle P, Q\rangle \in D^{r_1+r_2}(\bar{\sigma}, K), g_1(P,Q) = \dots, g_{r_1}(P,Q) = 0,$$
$$\det\big(\frac{\partial(g_1, \dots, g_{r_1})}{\partial(x_1, \dots, x_{r_1})}\big)(P,Q) \neq 0\}$$

حال به بیان نتایج وِن‌دِن‌دریز درباره‌ی توابع و مجموعه‌های تعریف‌پذیر در $\mathbb{R}_{an}$ می‌پردازیم (بخش ۱ را ببینید). همه‌ی این نتایج را در [۱۳] می‌توان یافت که در آنجا فرمولبندی آنها بر اساس مجموعه‌های به‌اصطلاح «متناهیاً زیرتحلیلی» صورت پذیرفته است. این مجموعه‌ها، دقیقاً همان مجموعه‌های تعریف‌شدنی در ساختار $\mathbb{R}_{an}$ هستند ([۳] را ببینید). بنابراین قضیه‌ی وِن‌دِن‌دریز را می‌توان به صورت زیر بازنوشت.

گزاره ۱۳ (وَن دِن دریز [۱۳]). ۱. ساختار $\mathbb{R}_{an}$ اُمینیمال [۲۴] است؛ یعنی هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ که در ساختار $\mathbb{R}_{an}$ تعریف‌شدنی باشد، اجتماعی است متناهی از بازه‌ها و تک‌نقطه‌ها.

۲. اگر $e \in \mathbb{R}$ و $f : (e, \infty) \to \mathbb{R}$ یک تابعِ (باپارامتر) تعریف‌شدنی در $\mathbb{R}_{an}$ باشد آن‌گاه $d \geq e$ موجود است، به طوری که تابع f در بازه‌ی (d, ∞) قابل نمایش با بسط پوزوی [۲۵] همگرای زیر باشد

$$f(x) = \sum_{i=p}^{\infty} a_i . x^{-i/q} \qquad (*)$$

که در آن $q \in \mathbb{N}$، $q \geq 1$، $p \in \mathbb{Z}$، $a_i \in \mathbb{R}$ (برای هر $i \in \mathbb{Z}$ که $i \geq p$) و داریم $a_p \neq 0$ مگر این که تابع (از جایی به بعد) به طور یکسان برابر صفر باشد.

همان‌گونه که در بخشِ ۱ گفته شد، هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ که در ساختار $\tilde{\mathbb{R}}$ تعریف‌شدنی باشد، نیز دارای تعریفی است در ساختار $\mathbb{R}_{an}$. از این رو، گزاره‌ی بالا در مورد $\tilde{\mathbb{R}}$ به‌جای $\mathbb{R}_{an}$ نیز صادق است. در زیر نتیجه‌ای از این گزاره آورده‌ایم که مورد نیاز ماست.

نتیجه‌ی ۱۴. گیریم $\tilde{K} \models \tilde{T}$، $e \in K$، و فرض کنیم $g : (e, \infty) \to K$ تابعی $\tilde{K}$ ـ تعریف‌شدنی باشد که در نهایت به طور یکسان صفر نیست. آن‌گاه، عددِ گویای s و یک عنصرِ ناصفرِ $a \in K$ چنان یافت می‌شوند که در $\tilde{K}$ هرگاه $x \to \infty$، آنگاه $g(x)x^s \to a$.

[۲۴] یا ترتیب‌کمینه، یا کمینه‌ی ترتیبی

[25] Puiseux expansion

اثبات. فرض کنید گرافِ تابع g در $\tilde{K}$ توسط فرمول $\phi(\bar{b}, x, y)$ تعریف شده باشد که در آن $\phi(\bar{z}, x, y) \in L$. فرض کنید فرمولِ $\psi(\bar{z})$ برای هر $\bar{z}$ بیانگر عبارت زیر باشد:

فرمول $\phi(\bar{z}, x, y)$ تابعی تعریف می‌کند که در نهایت به طور یکسان برابر با صفر نیست؛ به بیانِ دقیق، $\psi(\bar{z})$ فرمولِ زیر است:

$$\exists u \quad (\forall x > u \quad \exists! y \quad \phi(\bar{z}, x, y) \wedge \forall x > u \quad \exists w > x \quad \neg\phi(\bar{z}, w, ۰)).$$

توجه کنید که $\tilde{K} \models \psi(\bar{b})$.

حال، فرض کنید که $\bar{\alpha}$ یک چندتائی از اعدادِ حقیقی باشد که $\tilde{\mathbb{R}} \models \psi(\bar{\alpha})$ و بگذارید که $f_\alpha : (\beta, \infty) \to \mathbb{R}$ (برای یک بِتای مناسب) تابعی باشد که توسط $\phi(\bar{\alpha}, x, y)$ در $\tilde{\mathbb{R}}$ تعریف شده است. بنا به ۱۳ـ۲، برای x های به اندازه‌ی کافی بزرگ، می‌توان نمایشی به‌گونه‌ی (*) برای $f_{\bar{\alpha}}$ در نظر گرفت که در آن $a_p \neq ۰$ و هرگاه $x \to \infty$ داریم $f_{\overline{\alpha}}(x)x^{p/q} \to a_p$. بنا آنالیزِ مقدّماتی ریاضی، می‌توان از تک‌تکِ جملات سریِ (*) مشتق گرفت و به نمایشِ زیر برای تابع $f'_{\overline{\alpha}}$ در اطراف x های به اندازه‌ی کافی بزرگ رسید:

$$f'_{\overline{\alpha}}(x) = \sum_{i=p}^{\infty} -\frac{ia_i}{q} x^{-i/q-۱}$$

بنا به عبارتِ بالا، هرگاه $x \to \infty$ داریم $f'_{\bar{\alpha}}(x)x^{p/q+۱} \to -\frac{pa_p}{q}$ و بنابراین، حدِّ تابع $-f'_{\bar{\alpha}}(x)x/f_{\bar{\alpha}}(x)$ در بی‌نهایت، موجود و برابر با p/q است. با کمکِ تعریف‌های استاندارد $\epsilon - \delta$ برای وجود حد توابع، می‌توان $\tilde{L}$ ـ فرمول $\chi(\bar{z}, y)$ را چنان نوشت که در $\tilde{\mathbb{R}}$ بیانگر عبارت زیر باشد:

$$\lim_{x \to \infty} -(f'_{\bar{z}}(x)x)/f_{\bar{x}}(x) = y.$$

از این رو، فرمولِ $\exists \bar{z} \chi(\bar{z}, y)$ در $\tilde{\mathbb{R}}$ زیرمجموعه‌ای از اعداد گویا را تعریف می‌کند. از آنجا که $\tilde{\mathbb{R}}$ ساختاری اُمینیمال است، فرمولِ یادشده، زیرمجموعه‌ای متناهی از اعدادِ گویا، مثلاً $\{s_۱, \dots, s_n\}$ را تعریف می‌کند. بنابراین، $\tilde{L}$ ـ جمله‌ی زیر در ساختار $\tilde{\mathbb{R}}$ و از این رو در ساختارِ $\tilde{K}$ درست است.

$$\forall \bar{z} \quad (\psi(\bar{z}) \to \bigvee_{i=۱}^{n} (\text{موجود و ناصفر است}\ \lim_{x \to \infty} f_{\bar{z}}(x) x^{s_i}).$$

نتیجه‌ی مورد نظر از این که $\tilde{K} \models \psi(\bar{b})$ و (در بی‌نهایت) $f_{\bar{b}} = g$ حاصل می‌شود. □

۴ جرم‌های دیفرانسیل‌پذیر در کِشش‌های دلخواهی از $\overline{\mathbb{R}}$

در سرتاسرِ این بخش، $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ کشِشی است از میدان مرتّبِ $\overline{\mathbb{R}}$ و $\overline{\overline{L}}$ زبان، $\overline{\overline{T}}$ تئوری آن هستند. قراردادهایی مشابه قراردادهای بخش ۲ برای مدلهای $\overline{\overline{T}}$ نیز در نظر می‌گیریم.

گیریم $\overline{\overline{K}} \models \overline{\overline{T}}$. همانگونه که پیش‌تر دیدیم، بسیاری از ویژگی‌های موضعیِ حسابی و توپولوژیک را می‌توان بلافاصله از $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ به $\overline{\overline{K}}$ منتقل کرد؛ خواننده را با این روند آشنا فرض کرده‌ام. وانگهی، انتقال قضیه‌ی تابعِ‌ضمنی از $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ به $\overline{\overline{K}}$ نیاز به تأمل بیشتر دارد، که در زیر بدان پرداخته‌ایم.

گیریم $r, m \in \mathbb{N}$، $r, m \geq ۱$، و $\langle P, Q \rangle = \langle p_۱, \ldots, p_r, q_۱, \ldots, q_m \rangle$ نقطه‌ای باشد در K^{r+m}. فرض کنید U یک همسایگیِ بازِ K ـ تعریف‌پذیر از نقطه‌ی $\langle P, Q \rangle$ و $f_۱, \ldots, f_m : U \to K$ توابعی باشند تعریف‌پذیر که بی‌نهایت‌بار در سراسرِ U دیفرانسیل‌پذیراند. نیز فرض کنید که $\langle P, Q \rangle$ صفر ناتکینی باشد برای توابع $f_۱, \ldots, f_m$ نسبت به متغیرهای $x_{r+۱}, \ldots, x_{r+m}$؛ یعنی، طبق تعریف، که برای هر $i = ۱, \ldots, m$ داریم $f_i(P, Q) = ۰$ و در نقطه‌ی $\langle P, Q \rangle$، دترمینانِ ماتریسِ ژاکوبیِ Δ در زیر ناصفر است.

$$\Delta = \Delta(x_۱, \ldots, x_{r+m}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_{r+۱}} & \cdots & \frac{\partial f_۱}{\partial x_{r+m}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+۱}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{r+m}} \end{pmatrix}$$

حال اگر $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{K}}$، به کمکِ قضیه‌ی تابعِ ضمنی (برای مثال [۴] را ببینید) می‌شود همسایگی‌های بازِ $V_۱$ از P در K^r و $V_۲$ از Q در K^m را چنان یافت که

۴ ۰ ۱ $V_۱ \times V_۲ \subseteq U$.

۴ ۰ ۲ برای هر $\bar{x} \in V_۱$، نقطه‌ی یکتای $\langle y_۱, \ldots, y_m \rangle = \langle y_۱(\bar{x}), \ldots, y_m(\bar{x}) \rangle \in V_۲$ موجود است، به طوری که برای هر $i = ۱, \ldots, m$ داریم $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = ۰$ و نیز، $J(\bar{x}, \bar{y}) \neq ۰$.

۴ ۰ ۳ توابع $y_i : V_۱ \to K$، برای $i = ۱, \ldots, m$، بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرند و برای هر $l = ۱, \ldots, r$ و $\bar{x} \in V_۱$ داریم

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_۱}{\partial x_۱} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_۱} \end{pmatrix} = -\Delta^{-۱} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_۱}{\partial x_۱} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_۱} \end{pmatrix}$$

که عبارتِ سمت راست در نقطه‌ی $\langle \bar{x}, y_۱(\bar{x}), \ldots, y_m(\bar{x}) \rangle$ ارزشیابی شده است.

نیاز ما به موارد بالا در مدلِ $\overline{\overline{K}}$ است؛ از این رو در بحث زیر، برقراری آنها را در این مدل اثبات کرده‌ایم. وجود همسایگی‌های $V_۱$ و $V_۲$ صادق در شرطهای ۱ ۰ ۴ تا ۳ ۰ ۴ قابل تضمین است؛ می‌توان آنها را همسایگی‌های جعبه‌ای گرفت (یعنی به‌صورت $\{\langle z_۱, \ldots, z_t \rangle : |\alpha_i - z_i| < \epsilon\}$ برای $\alpha_۱, \ldots \alpha_t, \epsilon \in K$ و $\epsilon > ۱$). پس همسایگی‌های $V_۱$ و $V_۲$ را ثابت می‌گیریم. شرطِ یکتایی در ۲ ۰ ۴ تضمین‌کننده‌ی تعریف‌پذیری y_i ها، و ازاین‌رو، امکان انتقال ویژگی‌های مرتبه‌ی اول به $\overline{\overline{K}}$ است. بنا به

انتقال، توابع یادشده در $V_۱$ مشتق پیوسته داشته در شرط ۴۰۳ صدق می‌کنند. از این (تنها با بحث مستقیم در $\overline{\overline{K}}$) نتیجه می‌شود که توابع y_i در $V_۱$ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرند.

در ادامه به بررسیِ جرمهای توابع دیفرانسیل‌پذیر در مدل $\overline{\overline{K}}$ از تئوری $\overline{\overline{T}}$ پرداخته‌ایم.

تعریف ۱۸. گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۱$.

۱. یک گردایه از زیرمجموعه‌های بازِ K^n را یک «سامانه‌ی همسایگی» (به اختصار س.ه.) می‌خوانیم هرگاه تحتِ اشتراک‌گیریِ متناهی بسته باشد.

۲. اگر $\mathfrak{B}$ یک س.ه. باشد در K^n، با نماد $D^n(\mathfrak{B})^-$ مجموعه‌ی همه‌ی دوتائی‌های $\langle f, U\rangle$ را نشان می‌دهیم که در آنها $U \in \mathfrak{B}$ و $f : U \to K$ تابعی است بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر.

۳. برای $\langle f_۱, U_۱\rangle$ و $\langle f_۲, U_۲\rangle$ در $D^n(\mathfrak{B})^-$، می‌نویسیم $\langle f_۱, U_۱\rangle \sim \langle f_۲, U_۲\rangle$ هرگاه یک همسایگی $U \subseteq U_۱ \cap U_۲$ موجود باشد، به طوری که برای $\bar{x} \in U$ داشته باشیم $f_۱(\bar{x}) = f_۲(\bar{x})$. رابطه‌ی بالا، هم‌ارزی است. کلاسِ هر عنصرِ $\langle f_۱, U_۱\rangle$ در آن را با $[f_۱, U_۱]$ نشان می‌دهیم.

۴. مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی، یا *جرمها* را در رابطه‌ی یادشده، با $D^n(\mathfrak{B})$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی $D^n(\mathfrak{B})$ حلقه‌ای دیفرانسیلی و یکدار است. نمادهایِ طبیعیِ $\frac{\partial}{\partial x_۱}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ را برای نمایشِ مشتق‌های مشخص ایجادی در حلقه‌ی $D^n(\mathfrak{B})$ به‌کار می‌بریم.

لم ۱۹. گیریم $n \in \mathbb{N}$، $n \geq ۱$ و $\mathfrak{B}$ یک س.ه. در K^n باشند. فرض کنید M زیرحلقه‌ای از $D^n(\mathfrak{B})$ باشد، بسته تحت دیفرانسیل‌گیری و I ایده‌آلی متناهیاًتولیدشده باشد از M، که نیز تحت دیفرانسیل‌گیری بسته است. گیریم $\{[g_۱, U_۱], \ldots, [g_s, U_s]\}$ مجموعه‌ای مولّد برای I باشد و

$$Z = \{P \in \bigcap_{i=۱}^{s} U_i| \quad g_i(P) = ۰ \quad \text{برای هر } i = ۱, \ldots, s\}.$$

آن‌گاه یک همسایگی باز $U \in \mathfrak{B}$ یافت می‌شود، به طوری که $U \cap Z$ زیرمجموعه‌ی بازی از K^n باشد.

اثبات. ازآنجاکه I تحتِ دیفرانسیل‌گیری و $\mathfrak{B}$ تحتِ اشتراک‌گیریِ متناهی بسته است، همسایگی $U \in \mathfrak{B}$ و توابع تعریف‌پذیرِ $a_{i,j}^{(r)}$ برای $۱ \leq i, j \leq s, ۱ \leq r \leq n$ موجودند، به طوری که دامنه‌ی توابع $g_۱, \ldots, g_s$ و $a_{i,j}^{(r)}$ همسایگی باز U را دربرگیرد، توابع یادشده در U بی‌نهایت بار دیفرانسیل‌پذیر باشند، و نیز (برای $۱ \leq i \leq s$ و $۱ \leq r \leq n$) تساویهای زیر در U برقرار باشند.

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_r} = \sum_{j=۱}^{s} a_{i,j}^{(r)}.g_j \qquad (*)$$

ادّعا می‌کنم که $U \cap Z$ در K^n باز است. فرض کنید $P = \langle p_۱, \ldots, p_n\rangle$ نقطه‌ای واقع در $U \cap Z$، و $U_\cdot$ همسایگیِ جعبه‌ایِ بازی از P مشمول در U باشد. کافی است نشان دهیم که همه‌ی توابع g_i در $U_\cdot$ صفر

می‌شوند. گیریم چنین نباشد؛ دراین‌صورت، ازآن‌جا که توابع g_i همه در P برابر صفرند، نقاطی چون Q و S در $U_\circ$ یافت می‌شوند، به طوری که همه توابع g_i در Q صفر باشند، یکی از آنها در در S ناصفر باشد، و Q و S تنها در یک درایه، فرضاً درایه‌ی اوّل، با هم فرق کنند. فرض کنیم $Q = \langle q_1, q_2 \ldots, q_n\rangle$، $P = \langle q'_1, q_2, \ldots, q_n\rangle$ و $q_1 \neq q'_1$. گیریم (a, b) بازه‌ی بازی در K شاملِ q_1 و q'_1 باشد، به طوری که $\{(a, b) \times \{\langle q_2, \ldots, q_n\rangle\} \subseteq U_\circ$. برای هر تابعِ تعریف‌شدنیِ $f : U_\circ \to K$، فرض کنید $\tilde{f}$ تابعی باشد که با جایگزین کردنِ x_i، برای $i = 2, \ldots, n$، با q_i در f به‌دست آمده است. بنا به (*)، برای x های متعلق به بازه‌ی (a, b) داریم

$$\begin{pmatrix} \bar{g}'_1 \\ \vdots \\ \bar{g}'_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{g}_1 \\ \vdots \\ \bar{g}_s \end{pmatrix}$$

که در بالا، از آپاسترف، به جای $\frac{d}{dx_1}$ استفاده شده و A ماتریسِ $\left(\overline{a^{(1)}_{i,j}(x_1)}\right)_{1\leq i,j\leq s}$ است. حال، با سور زدن روی پارامترها، وضعیت فوق را به $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ انتقال می‌دهیم: بازه‌ی بازِ (c, d)، توابعِ به‌طورپیوسته‌دیفرانسیل‌پذیرِ $h_i, b_{i,j} : (c, d) \to \mathbb{R}$ برای $1 \leq i, j \leq s$، و نقطه‌های $\alpha, \beta \in (c, d)$ موجودند، به طوری که (با فرض $B = (b_{i,j}(x))_{1\leq i,j\leq s}$) برای x های متعلق به بازه‌ی (c, d) داریم

$$\begin{pmatrix} \bar{h}'_1 \\ \vdots \\ \bar{h}'_s \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{h}_s \end{pmatrix};$$

هم‌چنین برای $i = 1, \ldots, s$ داریم $h_i(\alpha) = 0$؛ نیز عنصر $i \in \{1, \ldots, s\}$ موجود است، به طوری که $h_i(\beta) \neq 0$. اکنون، با استفاده از تئوریِ معادلاتِ دیفرانسیلِ خطّی (برای مثال، قضیه‌ی ۱-۴-۱۱ و اثباتش در [۹] را ببینید) نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \in (c, d)$:

$$\begin{pmatrix} \bar{h}_1(x) \\ \vdots \\ \bar{h}_s(x) \end{pmatrix} = E(x)^{-1} E(\alpha) \begin{pmatrix} \bar{h}_1(\alpha) \\ \vdots \\ \bar{h}_s(\alpha) \end{pmatrix}$$

که در آن E ماتریسی است با ابعادِ $s \times s$ از توابع تعریف شده روی بازه‌ی (c, d) که برای هر x در این بازه معکوس‌پذیر است. برای رسیدن به تناقض مورد نظر، کافی است بگیریم $x = \beta$. □

نمادگذاری ۲۰. برای $n \in \mathbb{N}$، $n \geq 1$ و نقطه‌ی $P \in K^n$، مجموعه‌ی همه‌ی همسایگی‌های تعریف‌شدنیِ P را با $\mathfrak{B}_P$ نشان می‌دهیم. این مجموعه، یک س.ه. در K^n است. مجموعه‌های

$D^{(n)}(\mathfrak{B}_P)^-$ و $D^{(n)}(\mathfrak{B}_P)$ و $D^{(n)}(P)^-$ و $D^{(n)}(P)$ را به‌ترتیب با نشان می‌دهیم. برای $g \in D^{(n)}(P)$، به گونه‌ی $g = [f, U]$، منظورمان از $g(P)$، عنصرِ $f(P)$ است در K. این نماد به وضوح خوش‌تعریف است. هم‌چنین بسته به این‌که کدامیک ساده‌تر باشد، با $d_P g$ یا $d_P f$ عنصرِ $\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \rangle$ را نشان داده‌ایم، به عنوانِ عنصری از K ـ فضای برداریِ K^n.

دراین‌جا می‌خواهم به به وضعیّتِ ۱ ۰ ۴ تا ۳ ۰ ۴ برگشته به بحث درباره‌ی برخی نتایج کلاسیک، اعمال‌شده به بافتارِ حاضر، بپردازم. گیریم r, m, P, Q همانگونه باشند که در آغاز این بخش در بحث قضیه‌ی تابع ضمنی آمد. فرض کنید $n = r + m$ و برای $i = 1, \ldots, r$، تعریف کنید $\phi_i(\bar{x}) = x_i$. نیز برای $i = r+1, \ldots, n$ تعریف کنید $\phi_i(\bar{x}) = y_{i-r}(\bar{x})$؛ که در آن منظور از $\bar{x}$ چندتایی $(x_1, \ldots, x_n)$ است (به موارد ۲ ۰ ۴ و ۳ ۰ ۴ مراجعه شود). این تابعها، همه در یک مجموعه‌ی $\mathfrak{B}_P$ (یعنی V_1) تعریف شده بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرند، و بنابراین حلقه‌ی $\mathfrak{D}^r(P)$ را از اجرام شکل می‌دهند. نیز، توجه کنید که $\langle \phi_1(P), \ldots, \phi_n(P) \rangle = \langle P, Q \rangle$؛ که در نتیجه نگاشت زیر (بر روی توابع) ایجاد می‌شود:

$$\hat{}: \mathfrak{D}^n(P, Q) \to \mathfrak{D}^r(P)$$

که در آن $\hat{f}(\bar{x}) = f(\phi_1(\bar{x}, \ldots, \phi_n(\bar{x}))$ برای $\bar{x} \in W'$؛ به طوری که $\langle f, W \rangle \in \mathfrak{D}^{(n)}(P, Q)^-$ و

$$W' = \{\bar{x} \in V_1 : \langle \phi_1(\bar{x}, \ldots, \phi_n(\bar{x}) \rangle \in W\}.$$

این که $W' \in \mathfrak{B}_P$ واضح است. نگاشتِ یادشده، یک هُمومُرفیسمِ حلقه‌ای است که هسته‌ی آن دقیقاً مجموعه‌ی جرم‌هائی به صورت $[f, W]$ است در آنها f روی $V \cap Z$ صفر می‌شود؛ برای یک همسایگی $V \in \mathfrak{B}_{P,Q}$ و

$$Z = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in U | f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 ، \text{برای } i = 1, \ldots, m\}.$$

به‌ویژه، در $\mathfrak{D}^{(r)}(P)$ داریم $\widehat{[f_i, U]} = 0$ برای $i = 1, \ldots, m$؛ بنابراین در $\mathfrak{D}^{(r)}(P)$، برای $i = 1, \ldots, m$ و $j = 1, \ldots, r$، داریم $\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} = 0$.

لم ۲۱. با نمادگذاری بالا، دنباله‌ی $d_{P,Q} f_1, \ldots, d_{p,Q} f_m, d_{P,Q} g$ از بردارها، روی K مستقل خطی است اگروتنهااگر در K^r داشته باشیم $d_P \hat{g} \neq 0$.

اثبات. ازآن‌جا که $J(P, Q) \neq 0$، بردارهای $d_{P,Q} f_1, \ldots, d_{p,Q} f_m$ مستقل خطیند (به بحثهای در آغاز این بخش رجوع شود). بگیرید $g = [f_{m+1}, W]$.

فرض کنید $\sum_{i=1}^{m+1} a_i d_{P,Q} f_i = 0$ و همه‌ی a_i ها صفر نباشند. آنگاه $a_{m+1} \neq 0$. با کمک قاعده‌ی زنجیری، برای $j = 1, \ldots, r$ و $i = 1, \ldots, m+1$ داریم

$$\frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j}(P) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_l}(P, Q). \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(P). \qquad (*)$$

حال، با توجه به یادآوریِ پیش از این لم، فرضها و رابطه‌ی (*)، برای $j = ۱, \ldots, r$ داریم

$$\frac{\partial \hat{f}_{m+۱}}{\partial x_j}(P) = a_{m+۱}^{-۱} \sum_{i=۱}^{m+۱} a_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j}(P) = a_{m+۱}^{-۱} \cdot \sum_{l=۱}^{n} (\frac{\partial \hat{\phi}_l}{\partial x_j}(P) \sum_{i=۱}^{m+۱} a_i \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_l}(P, Q)) = ۰$$

و این همان است که می‌خواهیم.

حال، فرض کنید دنباله‌ی $d_{P,Q} f_۱, \ldots, d_{P,Q} f_{m+۱}$ مستقل خطی باشد. بگذارید A ماتریسِ با ستون‌های $d_{P,Q} f_i$ روی K باشد (آنجا که $۱ \leq i \leq m + ۱$). آنگاه، A نگاشتی K ـ خطّی به دست می‌دهد از K^n بروی $K^{m+۱}$ با هسته‌ی با بُعدِ $n - (m + ۱) = r - ۱$. به‌علاوه بنا به (*) و یادآوریِ پیش از این لم، برای $j = ۱, \ldots, r$ داریم

$$\left\langle \frac{\partial \phi_۱}{\partial x_j}(P), \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}(P) \right\rangle A = \left\langle ۰, \ldots, ۰, \frac{\partial \hat{f}_{m+۱}}{\partial x_j}(P) \right\rangle$$

ازطرفی، دنباله‌ی $۱ \leq j \leq r$: $\left\langle \frac{\partial \phi_۱}{\partial x_j}(P), \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial x_j}(P) \right\rangle$ از بردارها مستقل خطی است (زیرا برای $۱ \leq i, j \leq r$، داریم $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = \delta_{i,j}$) و ازاین‌رو، امکان ندارد که همه‌ی بردارهای آن در $\ker(A)$ باشند. پس، همان‌گونه که مورد جستجوی ماست $\frac{\partial \hat{f}_{m+۱}}{\partial x_j}(P) \neq ۰$. $\square$

تعریف ۲۲. گیریم $m, s \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۱$. فرض کنیم $g_۱, \ldots, g_s$ توابعی باشند بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر که دامنه‌ی هر یک مجموعه‌ی بازی در K^n است. آنگاه تعریف می‌کنیم

$$V(g_۱, \ldots, g_s) \overset{\text{تعریف}}{=} \{Q \in \bigcap_{i=۱}^{s} \text{دامنه}(g_i) | \quad g_i(Q) = ۰, i = ۱, \ldots, s \text{ برای}\}$$

و

$$V^{ns}(g_۱, \ldots, g_s) \overset{\text{تعریف}}{=} \{Q \in V(g_۱, \ldots, g_s) | \text{مستقلِ خطی است} \langle d_Q g_i : ۱ \leq i \leq s \rangle\}.$$

نیز، برای $s = ۰$، تعریف می‌کنیم $V = V^{ns} = K^n$.

در این مقاله به کرار از قضیه زیر استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۲۳. گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $n \geq ۱$ و $P_۰ \in K^n$ و فرض کنیم M زیرحلقه‌ای یکدارِ نوتری باشد از $\mathfrak{D}^{(n)}(P_۰)$ که تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است. فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و برای $i = ۱, \ldots, m$، $[f_i, U_i] \in M$. هم‌چنین فرض کنید $P_۰ \in V^{ns}(f_۱, \ldots, f_m)$. آنگاه یکی از موارد زیر رخ می‌دهد:

۱. $n = m$؛ یا

۲. $m < n$ و برای هر $[h, W] \in M$ که در آن $h(P_۰) = ۰$ یک همسایگی $U \in \mathfrak{B}_{P_۰}$ موجود است، به طوری که $U \subseteq W$ و h روی $U \cap V^{ns}(f_۱, \ldots, f_m)$ صفر می‌شود؛ و یا

۳. $m < n$ و یک $[h, W] \in M$ موجود است، به طوری که $P_0 \in V^{ns}(f_1, \dots, f_m, h)$.

اثبات. ازآن‌جا که $P_0 \in V^{ns}(f_1, \dots, f_m)$، اگر $m \neq n$ آن‌گاه $m < n$. فرض کنید $n = r + m$ که در آن $1 \leq r \leq m$.

ازآن‌جا که $\langle d_{P_0} f_i \ : \ 1 \leq i \leq m \rangle$ مستقل خطی است، یک زیرمجموعه‌ی m عضویِ S از $\{1, \dots, n\}$ موجود است، به طوری که $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P_0)\right)_{1 \leq i \leq m, j \in S}$ یک ماتریسِ ناتکین [۲۶] باشد. بی‌آن‌که گزندی به اثبات رسد، فرض می‌کنیم $S = \{r+1, \dots, n\}$؛ بنابراین اگر تابعِ زیر را با λ نشان دهیم

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle \to \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i \leq m, r+1 \leq j \leq n}$$

آن‌گاه، واضح است که برای یک همسایگی $U_0 \in \mathfrak{B}_{P_0}$، داریم $[\lambda, U_0] \in M$؛ و $[\lambda, U_0]$ (که آن را ازاین‌پس با Λ نشان می‌دهیم) در $\mathfrak{D}^{(n)}(P_0)$ وارون‌پذیر است. بگذارید $M^* = M[\Lambda^{-1}]$. حال، P_0 را به صورت $\langle P, Q \rangle$ بگیرید که در آن $P \in K^r$ و $Q \in K^m$؛ و نگاشتِ $\hat{} : \mathfrak{D}^n(P, Q) \to \mathfrak{D}^n(P)$ را به‌گونه‌ای که در بالا شرح دادیم، درنظر داشته باشید. روشن است که $\widehat{M^*}$، تصویرِ M^* تحتِ نگاشتِ $\hat{}$، ی ک زیرحلقه‌ی نوتریِ یکدار از $\mathfrak{D}^r(P)$ است که تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است. ت بسته بودن آن تحت دیفرانسیل‌گیری، از قاعده‌ی زنجیره‌ای و ۴۰۳ نتیجه می‌شود (و از همین روست که M^* را در نظر گرفته‌ایم ــ درایه‌های Δ^{-1} در ۴۰۳ در M^* جرم می‌سازند و نه لزوماً در M). بگذارید I ایده‌الِ $\{g \in \widehat{M^*} : g(P) = 0\}$ از $\widehat{M^*}$ باشد.

حالتِ نخست، $I = \{0\}$؛ فرض کنید $[h, W] \in M$ و $h(P_0) = 0$. بگذارید $g = [h, W]$. آن‌گاه $g(P_0) = 0$ و $\hat{g}(P_0) = 0$؛ یعنی $\hat{g} \in I$. بنابراین در $D^{(r)}(P)$ داریم $\hat{g} = 0$. حال حکمِ ۲ در این قضیه، از توضیح‌های پیش از لمِ ۲۱ نتیجه می‌شود.

حالتِ دوم، $I \neq \{0\}$؛ از آن‌جا که I متناهیاًتولیدشده است، از لم ۱۹ (با گرفتن $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_P$ و $M = \widehat{M^*}$) نتیجه می‌گیریم که I تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته **نیست**. بنابراین یک $g \in M^*$ موجود است، به طوری که $\hat{g} \in I$ (یعنی $\hat{g}(P) = 0$ و ازاین‌رو $g(P_0) = 0$) از طرفی، برای یک $1 \leq i \leq r$ داریم

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i} \notin I;$$

یعنی

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i}(P) \neq 0.$$

حال، برای یک $s \in \mathbb{N}$ داریم $\Lambda^s g \in M$. بگذارید $f = \Lambda^s . g$. آن‌گاه $f(P_0) = 0$ و به‌علاوه

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i(P)} = (s \hat{\Lambda}^{s-1} . \frac{\partial \hat{\Lambda}}{\partial x_i} . \hat{g})(P) + \left(\hat{\Lambda}^s . \frac{\partial \hat{g}}{\partial x_i}(P) \right) = \hat{\Lambda}^s(P) . \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_i}(P) \neq 0.$$

[۲۶] non-singular

بنابراین $d_p\hat{f} \neq ۰$ و بنابه لم ۲۱ حکمِ سومِ این قضیه (برای $f = [h, W]$) برقرار است. $\square$

پیش از به اتمام رساندن این بخش، لازم است نتیجه‌ی دیگری را ذکر کنم که (مستقیماً و یا بنا به لمِ ۲۱) از قضایای کلاسیک متناظر حاصل می‌شود (از این نتیجه در بخشِ بعد برای یافتنِ *نقاط تعریف‌پذیر* در مجموعه‌ی صفرهای توابع پِفافی استفاده خواهم کرد (لم ۷ را ببینید). جزئیاتِ پیش‌پاافتاده‌ی اثبات را در انتقال خصوصیاتِ موردنیاز از $\overline{\mathbb{R}}$ به خواننده واگذاشته‌ام.

گزاره ۲۴. گیریم $n, s, g_۱, \ldots, g_s$ همانگونه باشند که در لم ۲۲، و داشته باشیم $s < n$، و $P \in V^{ns}(g_۱, \ldots, g_s)$. فرض کنید $[g, W] \in \mathfrak{D}^{(n)}(P)$ به‌گونه‌ای باشد که برای یک $U \in \mathfrak{B}_\mathfrak{p}$ (به گونه‌ای که $U \subseteq W \cap \bigcap_{i=۱}^{s} \mathrm{dom}(g_i)$) داشته باشیم

$$\forall \bar{x} \in U \cap V^{ns}(g_۱, \ldots, g_s) \quad g(\bar{x}) \geq g(P)$$

(به بیانِ دیگر، فرض کرده‌ایم که P یک مینیممِ موضعیِ تابع g در $V^{ns}(g_۱, \ldots, g_s)$ است). آن‌گاه، دنباله‌ی بردارهای $\langle d_P g_۱, \ldots, d_P g_s, d_p g \rangle$ مستقل خطی است.

۵ نقاط تعریف‌پذیر روی مؤلفه‌ها و اثبات لمِ ۷

در ادامه همچنان از نمادگذاری‌های بخش ۴ استفاده کرده‌ایم. به‌ویژه، $\overline{\overline{K}}$ را یک مدلِ دل‌خواه از تئوری $\overline{\overline{T}}$ گرفته‌ایم.

عنصرِ $n \in \mathbb{N}$ را که $n \geq ۱$ ثابت‌گرفته فرض کنید U زیرمجموعه‌ای بازی باشد از K^n. واضح است که $\{U\}$ یک س.ه. است در K^nاست و مجازیم $\mathfrak{D}^{(n)}(\{U\})^-$ و $(\{U\})^-$ $\mathfrak{D}^{(n)}$ را با حلقه‌ی دیفرانسیلیِ یکدار متشکل از همه‌ی توابع تعریف‌پذیرِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر از U به K، که آن را با $\mathfrak{D}^{(n)}(U)$ نشان خواهیم داد، یکی بگیریم. اگر $P \in U$، آن‌گاه نگاشتِ $R_P : \mathfrak{D}^{(n)}(U) \to \mathfrak{D}^{(N)}(P)$ که هر f را به $[f, U]$ می‌برد، هومرفیسمی از حلقه‌های دیفرانسیلی است، که در حالتِ کلی، نه لزوماً یک‌به‌یک و نه پوشا است. به‌هرروی، واضح است که این نگاشت روی زیرحلقه‌ی یکدار تولیدشده توسط n تابعِ تصویر (محدودشده به U)، یک‌به‌یک است؛ نمادِ مرسومِ $\mathbb{Z}[x_۱, \ldots, x_n]$ را برای نمایش این زیرحلقه و R_P ـ تصویرش در $\mathfrak{D}^{(N)}(P)$، به کار برده‌ام.

قضیه ۲۵. با نمادهای بالا، فرض کنید M یک زیرحلقه‌ی نوتری از $\mathfrak{D}^{(n)}(U)$ باشد که $\mathbb{Z}[x_۱, \ldots, x_n]$ را شامل و تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است. بگذارید $f \in M$ و فرض کنید S یک زیرمجموعه‌ی ناتهیِ تعریف‌پذیر باشد از $V(f)$ که هم‌زمان باز در $V(f)$ (با توپولوژی زیرفضائی) و بسته در K^n است. آن‌گاه توابع $f_۱, \ldots, f_n \in M$ وجود دارند، به طوری که $S \cap V^{ns}(f_۱, \ldots, f_n) \neq \emptyset$.

اثبات. برای هر $Q\in S$، بگذارید I_Q ایده‌آلِ $\{g\in M: g(Q)=0\}$ از M باشد. ازآنجاکه M نوتری است، $p\in S$ را می‌توان چنان گُزید که I_Pدر $\{I_Q: Q\in S\}$ ماکزیمال باشد. بگذارید $\{g_1,\dots,g_n\}$ یک مجموعه‌ی مولّدِ متناهی برای I_P باشد و بگیرید $g=\sum_{i=1}^{n} g_i^2$. آنگاه $P\in V(g)\cap S$ و به‌علاوه، داریم

$$(*)\qquad \text{برای هر } Q\in V(g)\cap S،\qquad I_Q=I_P.$$

فرض کنید m بزرگ‌ترین عدد باشد، به طوری که برای یک $f_1,\dots,f_m\in M$ داشته باشیم $P\in V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$. اگر $m=n$، حکم ثابت شده است؛ بنابراین، برای به رسیدن به تناقض، فرض کنید $m<n$ و یک‌چنان $f_1,\dots,f_m$ را ثابت بگیرید.

ادّعای نخست: $V(g)\cap S\subseteq V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$.

اثبات ادّعای نخست. ازآن‌جاکه $P\in V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$، داریم $f_1,\dots,f_m\in I_P$ و $\det(E)\notin I_P$، آنجا که E زیرماتریسی $m\times m$ است از ماتریس $n\times n$ دارای سطرهای $\langle\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\rangle$ برای $1\le i\le m$. (توجه کنید که از آنجا که M تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است، داریم $\det(E)\in M$). ازاین‌رو، با کمکِ (*)، برای هر $Q\in V(g)\cap S$ داریم $f_1,\dots,f_m\in I_Q$ و $\det(E)\notin I_Q$ که از آن بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $Q\in V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$؛ همان‌که می‌خواستیم. □

ادّعای دوم: فرض کنید $Q\in V(g)\cap S$ و $h\in M$. آنگاه $Q\notin V^{ns}(f_1,\dots,f_m,,h)$.

اثباتِ ادّعای دوم. فرض کنید $Q\in V^{ns}(f_1,\dots,f_m,h)$. آنگاه، با بحثی همانندِ آن‌که در اثباتِ ادعای نخست کردیم، خواهیم داشت $P\in V^{ns}(f_1,\dots,f_m,h)$ که این ماکزیمال‌بودنِ m را نقض می‌کند.

ادّعای سوم. فرض کنید $Q\in V(g)\cap S$. آنگاه یک $W\in\mathfrak{B}_Q$ هست، به طوری که $W\subseteq U$ و

$$W\cap V(g)\cap S=W\cap V^{ns}(f_1,\dots,f_m).$$

اثباتِ ادعای سوم. ازآن‌جاکه $g\in I_P$، بنا به (*) داریم $g(Q)=0$. ازاین‌رو،با کمکِ ادّعای دوم و لم ۲۳ (اعمال‌شده به Mتحتِ R_P)، یک $W'\in\mathfrak{B}_Q$ وجود دارد، به طوری که $W'\subseteq U$ و g روی $W'\cap V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$ صفر می‌شود. از این رو، هر عنصر در I_P، و به‌ویژه f، روی $W'\cap V^{ns}(f_1,\dots,f_m)$ صفر می‌شود. بنابراین $W'\cap V^{ns}(f_1,\dots,f_m)\subseteq W'\cap V(g)\cap V(f)$. امّا، بنا به فرض، S در $V(f)$ باز است، بنابراین برای یک $W''\in\mathfrak{B}_Q$، داریم $W''\cap S=W''\cap V(f)$. پس با گرفتن $W=W'\cap W''$، داریم

$$W\cap V^{ns}(f_1,\dots,f_m)\subseteq W\cap V(g)\cap S.$$

حال، ادّعای سوم از ادّعای اول نتیجه می‌شود. □

ادّعای چهارم. $S \cap V(g)$ در K^n بسته است.

اثباتِ ادّعای چهارم. این ادعا را می‌توان بلافاصله بنا به این حقایق نتیجه گرفت که S (بنا به فرض) در K^n بسته است و داریم $S \subseteq U$ و نیز g روی مجموعه‌ی بازِ U (تعریف شده) و پیوسته است. حال فرض کنید $\bar{\eta} = \langle \eta_1, \dots, \eta_n \rangle \in \mathbb{Z}^n$. بنا به ادّعای ۴، یک نقطه‌ی $Q \in S \cap V(g)$ وجود دارد که فاصله‌ی آن از $\bar{\eta}$ کمینه‌ی ممکن است؛ یعنی

$$\forall \bar{x} \in S \cap V(g) \quad h(Q) \leq h(\bar{x})$$

که در آن $h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \eta_i)^2$ (همچنین توجه کنید که $S \cap V(g) \neq \emptyset$ زیراکه $P \in S \cap V(g)$). توجه کنید که h (محدود به U) عنصری از M است، زیرا که $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \subseteq M$. به‌علاوه، بنا به ادّعای ۳، Q درواقع یک مینیمُمِ موضعیِ h روی $V^{ns}(f_1, \dots, f_m)$ است؛ پس بنا به ۲۴ دنباله‌ی $\langle d_Q f_1, \dots, d_Q f_m, d_Q h \rangle$ از بردارها، مستقل خطی است. با بحثی مشابهِ آن که در اثباتِ ادعّای نخست کردیم، از این نتیجه می‌شود که $\langle d_P f_1, \dots, d_P f_m, d_P h \rangle$ مستقل خطی است. ازآن‌جاکه $\langle d_P f_1, \dots, d_P f_m \rangle$ مستقل خطی است، نتیجه می‌گیریم که برای هر $\eta \in \mathbb{Z}$، بردارِ $d_P h$ در زیرفضایی از K^n، بنامیمش X، قرار می‌گیرد که با بردارهای $d_P f_1, \dots, d_P f_m$ (روی K) تولید شده است. بگیرید $h = h_\eta$. با محاسبه‌ای ساده، داریم $\eta = \frac{1}{2} d_P h_{\bar{0}} - d_P h_{\bar{\eta}}$. پس $\mathbb{Z}^n \subseteq X$ که این غیرممکن است؛ زیرا $m < n$. □

۲.۵ اثبات لم ۷

قضیه‌ی ۲۵ را برای $\tilde{\mathbb{R}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ و $\tilde{T} = \overline{\overline{T}}$ و $\tilde{K}$، یک مدلِ دل‌خواهِ $\tilde{T}$به کار می‌گیریم (نگا. آغازِ بخشِ ۲). بگذارید $n, r \in \mathbb{N}$ و فرض کنید $\bar{\sigma}$ یک (n, r) ـ دنباله باشد. بگذارید $\tilde{T} \models \tilde{k}$ و $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$ و قرار دهید $U = D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$ که (نگا. تعریف ۲) U یک زیرمجموعه‌ی بازِ تعریف‌شدنی از K^rاست. به‌علاوه بنا بر تعریف ۳ و توضیحات میان لم ۴ و تعریف ۵ $M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \sigma)$ زیرحلقه‌ای از $\mathfrak{D}^{(r)}(U)$ و تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است. این زیرحلقه، همچنین، نوتری است، زیرا که روی میدانِ k متناهیاً تولید شده است، و $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r]$ (و درواقع $k[x_1, \dots, x_r]$) را به عنوان زیرحلقه دربر دارد.

حال، برای اثباتِ لمِ ۷ فرض کنید $g \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ و برای یک $P \in U$، داشته باشیم $g(P) = 0$. اگر می‌دانستیم که $V(g)$ در K^r بسته است، می‌شد مستقیماً از قضیه‌ی ۲۵ استفاده کرده (با گرفتن $n = r$ و $M = M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ و $U = D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$ و $f = g$ و $S = V(G)$) به یک نقطه‌ی $(\tilde{k}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنیِ $Q \in D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$ برسیم به‌طوری‌که $Q \in V(g)$، و بدین‌سان اثباتِ لم ۷ را به پایان بریم (برای $s = 0$). متأسفانه، هیچ دلیلی برای این فرض وجود ندارد که $V(g)$ روی مرزِ U، نقطه‌ی حدّی

ندارد. به‌هرروی، بر این مشکل، می‌توان با ترفندِ هندسی استاندارد راندنِ این‌گونه نقاط به بی‌نهایت، غلبه کرد.

برای این کار، با توجه به مثالِ ث در بخش ۲، $\bar{\sigma}$ را یک $(n, r+s)$ ـ دنباله می‌گیریم که در آن $s = ۲r$. حال برای $۱ \leq i \leq r$ تعریف می‌کنیم

$$g_i(x_۱, \dots, x_{r+s}) = \begin{cases} x_i.x_{r+i} - ۱ & \text{اگر } x_i\text{،}\bar{\sigma} \text{ ـ بسته باشد} \\ x_{r+i} - x_i & \text{وگرنه} \end{cases}$$

$$g_{r+i}(x_۱, \dots, x_{r+s}) = \begin{cases} (x_i - ۱).x_{۲r+i} - ۱ & \text{اگر } x_i\text{،}\bar{\sigma} \text{ ـ بسته باشد} \\ x_{۲r+i} - x_i & \text{وگرنه} \end{cases}$$

قرار دهید $f = g^۲ + \sum_{i=۱}^{۲r} g_i^۲$ و توجه کنید که اگر $\langle P_۱, \dots, P_r \rangle \in V(g)$ آن‌گاه $\langle P_۱, \dots, P_{r+s} \rangle \in V(f)$ که در آن برای x_i هائی که $\bar{\sigma}$ ـبسته نیستند، گرفته‌ایم $P_{r+i} = P_{۲r+i} = P_i$ و برای x_i های $\bar{\sigma}$ ـبسته، $P_{r+i} = P_i^{-۱}$ و $P_{۲r+i} = (P_i - ۱)^{-۱}$ (که در این صورت لزوماً $۱ < p_i < ۰$). بنابراین $V(f)$ ناتهی است. نیز به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که $V(f)$ در K^{r+s} بسته است. حال می‌توانیم با بحثی مشابه بالا (این‌بار قضیه‌ی ۲۵ را با $n = r + s$ و $M = M^{r+s}(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})$ و $S = V(f)$ و $U = D^{r+s}(\bar{\sigma}.\tilde{K}) = D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K}) \times K^s$ به کار می‌گیریم) اثبات ۷ را به فرجام برسانیم. $\square$

در گزاره ۱۰ گفتیم که چندگوناهای صفربُعدیِ پِفافی، به طور یکنواخت، متناهیند. خُوانسکی، تعمیمی طبیعی از این گزاره را برای مجموعه‌های دلخواه از صفرهای توابع پِفافی ثابت کرده است، که از قضا، آن را می‌توان با بحثهای آسان نظریه‌ی مدلی، از گزاره‌ی ۱۰ و قضیه‌ی ۲۵ نتیجه گرفت. از این رو، در زیر تنها به ذکر این نتیجه اکتفا نکرده و اثبات نظریه‌ی مدلی آن را نیز آورده‌ایم.

قضیه ۲۶ (خُوانسکی). فرض کنید $h_۱, \dots, h_l$ یک زنجیره‌ی پِفافی از توابع روی $\mathbb{R}^{m+n}$ باشد، و $g \in \mathbb{R}[x_۱, \dots, x_{m+n} h_۱, \dots, h_l]$. آن‌گاه یک عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ هست، به طوری که برای هر $Q \in \mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی $\{P \in \mathbb{R}^m : g(P, Q) = ۰\}$ بیشینه، دارای N مؤلفه است.

(منظور از یک مؤلفه‌ی از یک مجموعه‌ی $S \subseteq \mathbb{R}^m$، مجموعه‌ای است مانند $X \subseteq S$، به طوری که X در S بازْبسته [۲۷] است (توپولوژیِ زیرفضائی). روشن است که گردایه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های مجموعه‌ی S یک جبرِ بولی می‌سازد).

اثبات. فرض کنید که قضیه نادرست باشد. آن‌گاه برای هر $i \in \mathbb{N}$، یک $Q^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ و مؤلفه‌های ناتهیِ دوبه‌دو مجزای $C_۱^{(i)}, \dots, C_i^{(i)}$ برای مجموعه‌ی $\{P \in \mathbb{R}^m : g(P, Q^{(i)}) = ۰\}$ پیدا می‌شوند.

[۲۷] clopen

بگذارید $\overline{\overline{L}}$ گسترشی باشد از $\overline{L}$ دارای نمادهائی برای توابع $h_۱, \dots, h_l$ و مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ و نگاشتِ $i \to Q^{(i)}$ (برای $i \in \mathbb{N}$)، و رابطه‌ی $(m+۲)$ تائیِ $P \in C_j^{(i)}$. بگذارید $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ کشش مطابقِ زبان $\overline{\overline{L}}$ از $\overline{\mathbb{R}}$ باشد، و $\overline{\overline{K}}$ یک گسترشِ مقدّماتیِ $+(_{\text{الف‌صفر}}۲)$ ـ اشباع از $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$. بگذارید a یک عددِ طبیعیِ نااستاندارد باشد در K. آنگاه، تعبیرِ هر $C_i^{(a)}$ در $\overline{\overline{K}}$ زیرمجموعه‌ی است ناتهی و بازبسته در مجموعه‌ی Z در زیر، و بنابراین بسته در K^m.

$$Z \overset{\text{تعریف}}{=} \{P \in K^m | g(P, Q^{(a)}) = ۰\}$$

(توجه کنید که مجموعه‌های $C_i^{(a)}$ برای $i \le a$ هایی که $\overline{\overline{K}} \models$ "$i \in \mathbb{N}$" در نظر گرفته شده‌اند). فرض کنید $Q^{(a)} = (q_۱, \dots, q_n)$ و بگذارید

$$M = \mathbb{R}[x_۱, \dots, x_m, q_۱, \dots, q_n, h_۱(x_۱, \dots, x_m, Q^{(a)}), \dots, h_l(x_۱, \dots, x_m, Q^{(a)})].$$

آنگاه M حلقه‌ای نوتری است از توابع $\overline{\overline{K}}$ ـ تعریف‌شدنیِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر روی K^m، که $\mathbb{Z}[x_۱, \dots, x_m]$ را شامل، و تحتِ دیفرانسیل‌گیری بسته است. بنابه قضیه‌ی ۲۵ برای هر $i \le a$، به طوری که $\overline{\overline{K}} \models$ "$i \in \mathbb{N}$"، توابع $f_۱^{(i)}, \dots, f_m^{(i)}$ در M موجودند، به طوری که

$$C_i^{(a)} \cap V^{ns}(f_۱^{(i)}, \dots, f_m^{(i)}) \neq \emptyset.$$

از طرفی، بیشینه $_{\text{الف‌صفر}}۲$ انتخاب برای توابع $f_۱^{(i)}, \dots, f_m^{(i)}$ داریم، و بنا به گزاره‌ی ۱۰ هر $V^{ns}(f_۱^{(i)}, \dots, f_m^{(i)})$ متناهی است. از طرفی، گردایه‌ی

$$\{C_i^{(a)} : i \le a, \overline{\overline{K}} \models \text{"}i \in \mathbb{N}\text{"}\}$$

کمینه دارای $+(_{\text{الف‌صفر}}۲)$ مجموعه‌ی دوبه‌دومجزا است. این تناقض، اثبات را به پایان می‌رساند. $\square$

نتیجه‌ی ۲۷. فرض کنید $H_۱, \dots, H_l$ یک زنجیره‌ی پِفافی از توابع روی $\mathbb{R}^m$ باشد (برای $m \in \mathbb{N}$ و $m \ge ۱$) و $\tilde{\mathbb{R}}'$ ساختارِ $\langle \bar{\mathbb{R}}; H_۱, \dots, H_l, r \rangle_{r \in C}$ باشد (که در آن C زیرمجموعه‌ای است دلخواه از $\mathbb{R}$) و $\tilde{L}'$ زبان آن. فرض کنید $\phi(x_۱, \dots, x_p)$ فرمولی وجودی باشد در $\tilde{L}'$. آنگاه عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به طوری که برای هر $r_۲, \dots, r_p \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\{r_۱ \in \mathbb{R} : \tilde{\mathbb{R}}' \models \phi(r_۱, \dots, r_p)\}$ اجتماعی است از حداکثر N بازه‌ی باز و N نقطه.

اثبات. با کمک همان ترفندهای معمول، (نگا بخشِ ۲ پیش از تعریفِ ۱) فرض می‌کنیم که $\phi(x_۱, \dots, x_p)$ به صورت $\exists y_۱, \dots, y_n f(x_۱, \dots, x_p, y_۱, \dots, y_n) = ۰$ است که در آن f ترمی است در زبان $\tilde{L}'$. حال به‌آسانی می‌توان زنجیره‌ای پِفافی مثلِ $h_۱, \dots, h_{l'}$ از توابع روی $\mathbb{R}^{p+n}$ ساخت، به طوری که $f \in \mathbb{R}[\bar{x}, \bar{y}, h_۱, \dots, h_{l'}]$. پس بنا به ؟؟ یک عدد طبیعی $N_۰ \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به طوری

که برای هر $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی

$$Z(r_1, \dots, r_p) \overset{\text{تعریف}}{=} \{\langle p, q_1, \dots, q_n \rangle \in \mathbb{R}^{1+n} : f(p, r_2, \dots, r_p, q_1, \dots, q_n) = 0\}$$

بیشینه N، مؤلّفه دارد. همین گفته، به روشنی، درباره‌ی $\pi[Z(r_2, \dots, r_P)]$ هم برقرار است، که در آن $\pi : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$، تابعِ تصویر روی مختصِّ اول است. □

۶ چندگوناهای تک‌بعدی

در این بخش $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ کِشِشی از $\overline{\mathbb{R}}$ است، یا به فرمِ $\tilde{\mathbb{R}}$ (چنان‌که در بخشِ ۱ شرحش دادیم) و یا به صورت $\tilde{\mathbb{R}}'$، همانگونه که در فرض‌های نتیجه‌ی ۲۷ آمد. در حالت دوم، مجموعه‌ی C از عناصرِ مشخص را باید به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که شرایطی مشابه حالت اول را برآورده کند (نگا بخشِ ۱ پس از معادله‌ی ۲). همه‌ی تعریف‌های آمده در بخش ۲، به $\tilde{\mathbb{R}}', \tilde{L}', \tilde{T}', \tilde{K}', \tilde{k}'$ نیز قابل‌اعمال هستند، و در واقع، در این حالت حتی پیچیدگی کمتری دارند. برای مثال، در تعریف ۱ الف لازم نیست اجازه داد $y_1, \dots, y_m$ بتوانند صفر یا یک نیز باشند؛ و $D^r(\bar{\sigma}, \tilde{K})$، برای هر $\tilde{K} \models \tilde{T}'$، و هر (n, r) ـ دنباله‌ی $\bar{\sigma}$، برابر با K^r است (نگا تعریف ۲).

هدفم در این بخش، اثبات این نکته است، که منحنی‌های (فضاییِ) ناتکینی را که به‌طورضمنی با ترمهایی در مدلهای تئوری $\tilde{T}$ قابل‌تعریف هستند، می‌توان به‌طورصریح توسط تعدادی متناهی تابع تعریف‌پذیرِ بی‌نهایت‌دیفرانسیل‌پذیرِ دارای بازه‌های باز به عنوان دامنه، پارامتربندی کرد. پیش از آن، به نتیجه‌ی ترکیبیاتی زیر نیاز است.

لم ۲۸. گیریم $n, N \in \mathbb{N}$ و $n, N \geq 1$. آن‌گاه، عناصرِ $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{Z}^n$ وجود دارند، که در آن $s = n.N^2 + 1$، به طوری که برای هر میدانِ با مشخصه‌ی صفر و هر انتخاب از عناصر متمایزِ $P_1, \dots, P_m \in K^n$ ($m \leq N$)، یک عنصر i در میانِ $1 \leq i \leq s$ وجود دارد، به طوری که عناصرِ $Q_i.P_1, \dots, Q_i.P_m$ در K دوبه‌دو متمایز باشند. (در این‌جا منظور از « . » همان ضربِ عددیِ معمول است).

اثبات. عناصرِ $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{Z}^n$ را در موقعیت کلی در نظر بگیرید؛ یعنی طوری که هر n تای آن‌ها روی $\mathbb{Q}$ (وازاین‌رو روی هر میدانِ با مشخصه‌ی صفر) مستقل خطی باشند. برای به تناقض رسیدن، فرض کنید که m, K ($m \leq N$) و عناصرِ متمایزِ $P_1, \dots, P_m \in K^n$ موجودند، به طوری که برای هر $i = 1, \dots, s$، برای عناصری چون α_i, β_i که $1 \leq \alpha_i < \beta_i \leq m$ داریم $Q_i.P_{\alpha_i} = Q_i.P_{\beta_i}$. ازآن‌جا که دامنه‌ی نگاشتِ $i \to \langle \alpha_i, \beta_i \rangle$ اندازه‌ی اکیداًبزرگ‌تر از $n.N^2$ و بُردش اندازه‌ی کوچک‌ترمساویِ N^2 دارد، عناصرِ α, β موجودند، $1 \leq \alpha, \beta \leq m$، به طوری که برای n مقدار مختلف از i، داشته باشیم $Q_i(P_\alpha - P_\beta) = 0$. این گفته، ازآن‌جا که $P_\alpha - P_\beta \neq 0$، نحوه‌ی انتخابِ Q_i ها را نقض می‌کند. □

قضیه ۲۹. گیریم $n, r \in \mathbb{N}$، $r \geq ۲$ و $\bar{\sigma}$ یک (n, r) ـ دنباله باشند. بگذارید $\overline{\overline{T}} \models \overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}$، $\overline{\overline{k}} \subseteq \overline{\overline{K}}$ و فرض کنید $g_۱, \ldots, g_{r-۱} \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \bar{\sigma})$. نیز بگیرید

$$V = \{P \in D^r(\bar{\sigma}, \overline{\overline{K}}) | g_۱(P) = \ldots = g_{r-۱}(P) = ۰\}$$

و فرض کنید که الف و ب در پائین برقرار باشند.

الف V زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از K^r است.

ب برای هر $P \in V$، داریم $\det\left(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_{r-۱})}{\partial(x_۲, \ldots, x_r)}\right)(P) \neq ۰$ (نگا نمادگذاری‌هائی که بیش از تعریف ۵ وضع کردیم).

آنگاه یک زیرمجموعه‌ی متناهی $\mathcal{S}$ از زوج‌های $\langle I, \phi \rangle$ موجود است، به طوری که

۱. برای هر $\langle I, \phi \rangle \in \mathcal{S}$، I بازه‌ای باز است در K و $\phi : I \to K^{r-۱}$ تابعی است تعریف‌شدنی و بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر.

۲. برای هر $\langle I, \phi \rangle \in \mathcal{S}$، اگر $\sup I \in K$ (یعنی اگر $\sup I \neq \infty$)، آنگاه هنگامی‌که $x \to \sup I$ (از پائین)، داریم $\|\phi(x)\| \to \infty$، که در آن $\|.\|$ نُرمِ معمول در $K^{r-۱}$ است؛ و متناظرِ همین گفته برای $\inf I$ برقرار است.

۳. $V = \bigcup\{\text{گراف}(\phi) : \langle I, \phi \rangle \in \mathcal{S}\}$ و این اجتماع، مجزا است.

اثبات. از نتیجه‌ی ۱۲ (یا نتیجه‌ای مشابه آن، که از گزاره‌ی ۱۰ با گرفتنِ $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \tilde{\mathbb{R}}'$ حاصل می‌شود) و ب در بالا، می‌توان نتیجه گرفت که عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که برای هر $p_۱ \in K$ مجموعه‌ی $V_{p_۱}$ در زیر، بیشینه N عضو داشته باشد.

$$V_{p_۱} = \{\langle p_۲, \ldots, p_r \rangle \in K^{r-۱} : \langle p_۱, \ldots, p_r \rangle \in V\}$$

بگیرید $s = (r-۱).N^۲ + ۱$ و فرض کنید $Q_۱, \ldots, Q_s$ همانند آنهایی باشند که در لم ۲۸ آمده‌اند (باگرفتنِ $n = r - ۱$). برای هر $m = ۱, \ldots, N$ و $i = ۱, \ldots, s$ بگیرید:

$$A_{m,i} = \{p_۱ \in K | \textbf{اندازه}(V_{p_۱}) = \textbf{اندازه}(Q_i.V_{p_۱}) = m\}.$$

به آسانی قابل تحقیق است که $A_{m,i}$ را در $\overline{\overline{K}}$ می‌توان با ترکیبی بولی از فرمول‌های وجودی (با پارامتر) تعریف کرد و ازاین‌رو، بنا به توضیحاتِ‌پس از نتیجه‌ی ۱۴ (در حالت $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \tilde{\mathbb{R}}$) و یا بنا به نتیجه‌ی ۲۷ (برای حالت $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \tilde{\mathbb{R}}$)، این مجموعه، اجتماعی است متناهی از از بازه‌ها و نقطه‌ها. ازاین‌رو عنصر $t \in \mathbb{N}$ و عناصرِ $a_۱, \ldots, a_t \in K$ موجودند، به طوری که (با گرفتنِ $a_. = -\infty$ و $a_{t+۱} = +\infty$):

$$a_. < a_۱ < \ldots < a_t < a_{t+۱},$$

و برای $j=0,\dots,t$، $i=1,\dots,s$ و $m=1,\dots,N$ و $p,q\in(a_j,a_{j+1})$، داریم

$$p\in A_{m,i} \;\text{اگروتنهااگر}\; q\in A_{m,i}. \qquad (*)$$

حال برای $P\in K$، تعریف کنید

$$m(p)=\textbf{اندازه}(V_p)$$
$$i(p)=\min\{i|Q_i.p=m(p)\}$$

داریم $m(P)\le N$ و موجود بودن $i(P)$ از لم ترکیبیاتی ۲۸ نتیجه می‌شود. به‌علاوه، از (*) به‌آسانی نتیجه می‌شود، که برای $j=0,\dots,t$، اگر $a_j<p,q<a_{j+1}$ ، آنگاه $m(p)=m(q)$ و $i(p)=i(q)$؛ این اعداد را به‌ترتیب با m_jو i_j نشان می‌دهیم. حال توابع $\phi_{j,l}:(a_j,a_{j+1})\to K^{r-1}$ را (برای $j=0,\dots,t$ که $m_j\ge 1$ و $l=1,\dots,m_j$) را به‌گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$\phi_{l,j}(x)=\bar{y}\Leftrightarrow \exists\bar{y}^{(1)},\dots,\bar{y}^{(m_j)}\big(\langle x,\bar{y}^{(1)}\rangle\in V,\dots,\langle x,\bar{y}^{(m_j)}\rangle\in V\wedge$$
$$Q_{i_j}.\bar{y}^{(1)}<\dots,<Q_{i_j}.\bar{y}^{(m_j)}\wedge\bar{y}=\bar{y}_l\big).$$

اکنون، ازآن‌جا که نگاشتِ $\bar{y}\to Q_{i_j}.\bar{y}$ از $K^{r-1}\to K$ پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که هر $\phi_{j,l}$ به طور موضعی با تابعی به دست آمده از قضیه‌ی تابعِ ضمنی برای V برابر (نگا بحث‌های آغازِ بخشِ ۴) و ازاین‌رو، روی بازه‌ی (a_j,a_{j+1}) بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر است. هم‌چنین روشن است که

$$\{\langle p_1,\dots,p_r\rangle\in V: a_j<p_1<a_{j+1}\}=\bigcup\{\text{گراف}(\phi_{j,l}):1\le l\le m_j\}$$

که اجتماعِ بالا، مجزا است.

حال فرض کنید $j<t$ (پس $a_{j+1}\neq\infty$) و $1\le l\le l_j$. آنگاه یا $\|\phi_{j,l}(x)\|\to\infty$ هنگامی‌که $x\to a_{j+1}$ (ازپائین)؛ و یا $\langle p_2,\dots,p_r\rangle\in K^{r-1}$ موجود است که $\langle a_{j+1},p_2,\dots,p_r\rangle$ یک نقطه‌حدیِ $(\phi_{j,l})$ گراف باشد؛ زیرا، این امر برای $\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\overline{\overline{K}}$، بدیهی است، و ازآنجا که تنها به پیوسته‌بودن $\phi_{j,l}$ نیاز است این نتیجه را می‌توان به یک مدل کُلیِ $\overline{\overline{K}}$ انتقال داد. از فرضِ الفِ قضیه، برمی‌آید که $\langle a_{j+1},p_2,\dots,p_r\rangle\in V$ (توجه کنید که این‌که V زیرمجموعه‌ی بسته‌ای است از $D^r(\bar{\sigma},\tilde{K})$، به‌تنهائی در این‌جا کافی نیست)، ازاین‌رو، بنا به ب و قضیه‌ی تابعِ ضمنی، یک همسایگیِ جعبه‌ایِ باز، که آن را U می‌گیریم، از $\langle p_2,\dots,p_r\rangle$ در K^{r-1}، یک $\epsilon\in K$ به طوری که $a_j<a_{j+1}-\epsilon<a_{j+1}<a_{j+1}+\epsilon<a_{j+2}$، و نیز یک تابعِ K ـ تعریف‌شدنیِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرِ $\phi:(a_{j+1}-\epsilon,a_{j+1}+\epsilon)\to U$ موجودند، به‌گونه‌ای‌که $\phi(a_{j+1})=\langle p_2,\dots,p_r\rangle$ و

$$V\cap(a_{j+1}-\epsilon,a_{j+1}+\epsilon)\times U=\text{گراف}(\phi)$$

توجه کنید که تابع ϕ باید روی $(a_{j+1}-\epsilon, a_{j+1})$ بر $\phi_{j,l}$ منطبق باشد (زیرا مجموعه‌ی

$$\{p \in (a_{j+1}-\epsilon, a_{j+1}) : \phi(p) = \phi_{j,l}(p)\}$$

در $(a_{j+1}-\epsilon, a_{j+1})$ هم باز و هم بسته است؛ این مجموعه هم‌چنین ناتهی است، زیرا $(a_{j+1}-\epsilon, a_{j+1}) \times U$ نقطه‌ای را از گرافِ $\phi_{j,l}$ شامل است که لزوماً در V و روی گرافِ ϕ است). در واقع باید یک $1 \leq l' \leq m_{j+1}$ وجود داشته باشد، به طوری که $(a_{j+1}-\epsilon, a_{j+1})$، ϕ بر $\phi_{j+1,l'}$ منطبق باشد. ازاین‌رو می‌توان توابع $\phi_{j,l}$ و $\phi_{j+1,l'}$ و $\{\langle a_{j+1}, p_2, \ldots, p_r\rangle\}$ را به هم چسبانده به یک تابعِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرِ تعریف‌شدنی از (a_j, a_{j+2}) به K^{r-1} رسید که گرافش در V باشد. نتیجه‌ی این قضیه از تکرارِ این فراروند تا آن‌جاکه هیچ چسباندنِ دیگری در میان a_jها ممکن نباشد، به‌دست می‌آید. $\square$

مجموعه‌ی S را در قضیه‌ی ۲۹، یک *پارامتربندی* برای V در $\overline{\overline{K}}$ می‌نامم. اگر $V \cap k^r$ هم در k^r بسته باشد، آنگاه می‌شود قضیه‌ی ۲۹ را برای $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{k}}$ به کار بست و به یک پارامتربندیِ S' برای $V \cap k^r$ در $\overline{\overline{k}}$ رسید؛ با این حال، فعلاً هیچ رابطه‌ای میان S و S' دیده نمی‌شود. لمِ بعدی وضعیت را کمی روشن‌تر می‌کند.

لم ۳۰. فرض کنید علاوه بر فرض‌های قضیه‌ی ۲۹، هر نقطه‌ی $(\overline{\overline{k}}, \bar{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در $K^r \cap V$ در k^r واقع شود (تعریف ۵ را ببینید). بگذارید

$$K^- = \{\alpha \in K | -\beta < \alpha < \beta \text{ ،}\beta \in k \text{ برای یک}\}$$

هم‌چنین فرض کنید $\alpha \in K^-$، $P \in K^{r-1}$، $\|P\| \in K^-$، و $\langle \alpha, P\rangle \in V$. آنگاه، نقاطِ $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, B_1, B_2$ در k به‌گونه‌ای‌که $\gamma_2 < \gamma_1 < \alpha < \beta_1 < \beta_2$ و $\|P\| < B_1 < B_2$، یک عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ که $m \geq 1$، و توابع $\overline{\overline{K}}$ ـ تعریف‌شدنیِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرِ $\phi_i : (\gamma_2, \beta_2) \to K^{r-1}$ (برای $i = 1, \ldots m$)، موجودند، به طوری که

۱. برای $i = 1, \ldots, m$، داشته باشیم $||\phi_i(p)|| < B_1$ و $p \in (\gamma_2, \beta_2)$؛

۲. $V \cap ((\gamma_2, \beta_2) \times \{Q \in K^{r-1} : ||Q|| < B_2\}) = \bigcup_{i=1}^m$ گراف (ϕ_i) و این اجتماع، مجزا است.

به‌علاوه، اگر $V \cap k^r$ در k^r بسته باشد، آنگاه توابع بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیرِ $\psi_i : (\gamma_2, \beta_2) \to k^{r-1}$ (برای $i = 1, \ldots, m$) یافت می‌شوند، به طوری که، پس از تعبیر همه‌ی این مفاهیم در $\overline{\overline{k}}$، موارد ۱ و ۲ در بالا، برای ψ_i به جای ϕ_i برقرارند.

ملاحظه‌ی ۳۱. همان‌گونه که در ادامه نشان خواهم داد، اضافه کردن شرطِ بالا برای $\tilde{k}$ و مورد $\tilde{K}$ و ب در قضیه‌ی ۲۹ نتیجه می‌دهند که اگر $m \leq i \leq 1$، $p \in k$ و $\beta_2 < p < \gamma_2$، آن‌گاه داریم $\phi_i(p) \in k^{r-1}$. به‌هرروی، هنوز هیچ تضمینی وجود ندارد برای این که تابع $\phi_i|_k$ با یک $\psi_{i'}$ مساوی، یا حتّی $\overline{\overline{k}}$ ـ تعریف‌شدنی باشد.

اثبات. با نمادهای به کار رفته در اثباتِ قضیه‌ی ۲۹، عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ را به‌گونه‌ای بگیرید که دقیقاً m نقطه‌ی $Q \in V_\alpha$ موجود باشند، به طوری که $\|Q\| \in K^-$. این نقاط را $P_1, \ldots, P_m$ فرض کرده توجه کنید که از آنجا که P یکی از آنهاست، داریم $m \geq 1$. عنصرِ $B \in k$ را به‌گونه‌ای برگزینید که برای $i = 1, \ldots, m$ داشته باشیم $||P_i|| < B$، و بگذارید $B' \in k$ عنصری باشد بزرگتر از B. مشخصاً برای هر $Q \in V_\alpha\{P_1, \ldots, P_m\}$ داریم $\|Q\| > B'$. برای هر $i = 1, \ldots, m$ بگذارید $\langle I_i, \phi_i \rangle$، آن عنصرِ (یکتائی) از $\mathcal{S}$ باشد که در آن $\alpha \in I_i$ و $\phi_i \alpha = P_i$. این امر با توجه به مورد ۳ در قضیه‌ی ۲۹ امکان‌پذیر است. حال مجموعه‌ی ($\overline{\overline{K}}$ ـ تعریف‌شدنیِ) A^+ را (وابسته به B و B'، که آن را با $A^+(B, B')$ هم نشان می‌دهیم) به‌گونه‌ی زیر در نظر بگیرید:

$$A^+ = \left\{ p \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{داریم}\, q \in [\alpha, p] \text{ و } i = 1, \ldots, m \text{ و برای هر } p \geq \alpha \\ \text{هستند که شرطِ}\, Q \in V_q \text{ تنها نقاطِ } \phi_1(Q), \ldots, \phi_m(Q) \text{ و } ||\phi_i(Q)|| < B \\ \text{را برمی‌آورند}\, ||Q|| \leq B' \end{array} \right\}$$

بنا به موارد ۱، ۲، و ۳ در قضیه‌ی ۲۹ مجموعه‌ی A^+ به شکل یک بازه‌ی $[\alpha, \beta)$ است که در آن $\beta \in K \cup \{\infty\}$ و $\beta > \alpha$. در صورتی که $\beta = \infty$، بگذارید β_1 و β_2 عناصری از k باشند که $\alpha < \beta_1 < \beta_2$. این امر بدان‌جهت امکان‌پذیر است که $\alpha \in K^-$. هرگاه $\beta \in K$، ادّعا می‌کنم که $\beta \in k$. مشخصاً $\beta \in \bigcap_{i=1}^{m} I_i$، که غیر این صورت، ناقض موارد ۱ و ۲ در قضیه‌ی ۲۹ خواهد بود.

بنابراین $Q \in V_\beta$ به گونه‌ای موجود است که یا $\|Q\| = B$ و یا $\|Q\| = B'$. تابعِ $g : D^r(\overline{\sigma}, \overline{\overline{K}}) \to K$ را به صورت $g(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{i=2}^{r} x_i^2 - B^2$ (در حالتِ اوّل) یا $\sum_{i=2}^{r} x_i^2 - B'^2$ (در حالت دوم) تعریف کنید. آن‌گاه $g \in M^r(\overline{\overline{K}}, \overline{\overline{k}}, \overline{\sigma})$ و g در نقطه‌ی $\langle \beta, Q \rangle$ صفر می‌شود؛ ولی برای هیچ همسایگیِ W از $\langle \beta, Q \rangle$ تابع یادشده در $V \cap W$ صفر نمی‌شود. حال با کمک قضیه‌ی ۲۳ (با گرفتنِ $n = r$، $P_0 = \langle \beta, Q \rangle$ و $M = \{[f, D^r(\bar{\sigma}, \overline{\overline{K}})] : f \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \bar{\sigma})\}$ و $\{f_1, \ldots, f_m\} = \{g_1, \ldots, g_{r-1}\}$) نتیجه می‌شود که $\langle \beta, Q \rangle$ نقطه‌ای است $(\overline{\overline{k}}, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در $K^r \cap V$ است و بنابراین واقع در k^r. اثبات ادعا در این جا به پایان می‌رسد. حال، بگذارید $\beta_1 = \beta$ و $B_1, B_2 \in k$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید، که $B < B_1 < B_2 < B'$. بنابراین $A^+(B_1, B_2) = [\alpha, \beta')$ برای یک $\beta' \in k \cup \{\infty\}$ و روشن است که $\beta' > \beta_1$. هرگاه $\beta' \in k$، آن‌گاه بگیرید $\beta_2 = \beta'$. اگر $\beta' = \infty$، بگیرید $\beta_2 = \beta_1 + 1$. بنا به تعریفِ A^+، موارد ۱و۲ برای α به جای γ_2 برقرارند. به‌هرروی، عناصرِ γ_1, γ_2 را در k می‌توان با بحثِ مشابهی با گرفتنِ A^- (که برای

تعریفِ آن، در تعریفِ A^+، عبارات $\alpha \leq p$ و $[p, \alpha]$ را به‌ترتیب با $\alpha \geq p$ و $[\alpha, p]$ جایگزین کرده‌ایم) با همان $B, B', B_۱, B_۲$ به‌دست آورد.

برای اثباتِ قسمتِ آخرِ لم، نخست ب توجه کنید که آنچه که در ملاحظه‌ی بالا آمده است از قضیه‌ی ۲۳ نتیجه می‌شود، زیرا اگر $V \in \langle p, Q\rangle$ و $p \in k$، آن‌گاه تابعِ $x_۱ - p \to \langle x_۱, \ldots, x_r\rangle : K \to D^r(\overline{\sigma}, \overline{\overline{K}})$ در $M^r(\overline{k}, \overline{K}, \overline{\sigma})$ است و در $\langle p, Q\rangle$ صفر می‌شود؛ ولی در V به طور موضعی در $\langle p, Q\rangle$ برابر با صفر نیست. ازاین‌رو، ازآن‌جاکه V بی‌سورتعریف‌شدنی (با پارامترهای در k است) از موارد ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که برای هر $p \in k$ که $\gamma_۲ < p < \beta_۲$ دقیقاً m نقطه‌ی $Q \in k^{r-۱}$ موجودند، به طوری که $\overline{\overline{k}} \models (\langle p, Q\rangle \in V \wedge ||Q|| < B_۲)$؛ و هرچنین‌نقطه‌ای، شرطِ $B_۱ > ||Q||$ را برآورده می‌کند. بگذارید $Q_۱, \ldots, Q_m$، چنین نقاطی برای انتخابِ $p = \frac{\gamma_۲+\beta_۲}{۲}$ باشند. بگذارید $\mathcal{S}'$ یک پارامتربندی برای V باشد در $\overline{\overline{k}}$، و برای هر $i = ۱, \ldots, m$، عنصرِ (یکتای) $\langle I', \psi'\rangle \in \mathcal{S}'$ را طوری انتخاب کنید که $\psi_i(\frac{\gamma_۲+\beta_۲}{۲}) = Q_i$. بردارید. حال، از آنجا که نگاشتِ $||\psi_i(x)|| \to x$ روی $I' \cap (\gamma_۲, \beta_۲)$ پیوسته است، از قضیه‌ی مقدارِ میانی (در $\overline{\overline{k}}$) نتیجه می‌شود، که این تابع، هیچگاه مقداری بزرگتر از یا مساوی با $B_۱$ نمی‌پذیرد. نیز، به‌ویژه (بنا به مورد ۲ در قضیه‌ی ۲۹) داریم $(\gamma_۲, \beta_۲) \subseteq I'_i$؛ که از آن اثبات لم به دست می‌آید. $\square$

۷ اثباتِ لمِ ۸

لم ۸ را درواقع برای هردوی $\tilde{T}$ و $\tilde{T}'$ ثابت خواهم کرد. فرض کنید $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ و $\overline{\overline{T}}$ وغیره، همان‌گونه باشند که در آغازِ بخشِ ۶ شرح داده شد. اثبات، با استقرا روی n خواهد بود. قدم پایه‌ی استقرا را مثالِ ت در بخشِ ۲ فراهم آورده است. برای اثبات گامِ استقرا، فرض کنید که $n, r \in \mathbb{N}$، $\overline{K}, \overline{\overline{k}} \models \overline{\overline{T}}$، $\overline{\overline{k}} \subseteq \overline{\overline{K}}$، و $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ یک $(n+۱, r)$ ـ دنباله باشد ($\overline{\sigma}$ یک (n, r)ـ دنباله است) که

۸. برای هر $s \geq e$، هر نقطه‌ی $(\overline{\overline{k}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle)$ ـ تعریف‌شدنی در K^s در $(K^-)^s$ واقع شود.

(K^- را در حکمِ لمِ ۳۰ معرفی کرده‌ایم).

گیریم $s \geq r$. ازآن‌جا که هر متغیّرِ $\overline{\sigma}$ ـ بسته (نگا مورد ۲ در تعریف ۱) همچنین $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ ـ بسته نیز هست، داریم $D^s(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle, \overline{\overline{K}}) \subseteq D^s(\overline{\sigma}, \overline{\overline{K}})$. به‌علاوه، اگر $g \in M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$، آن‌گاه $g \restriction D^s(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle, \overline{\overline{K}}) \in M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle)$ و بی‌آنکه آسیبی به اثبات وارد آید، می‌شود $M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$ را با تصویرش در $M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle)$ تحتِ این نگاشتِ محدودشده یکی گرفت (ملاحظات مشابهی برای وقتی که هر $\overline{\overline{k}}$ را با $\overline{\overline{K}}$ جایگزین کنیم، برقرارند). فرضِ استقرا و مورد ۸ در بالا، به‌روشنی نتیجه می‌دهند که

۹. برای هر $r \geq s$ و $P \in K^s$، اگر P نقطه‌ای باشد $(\overline{\overline{k}}, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی، و $P \in D^s(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$، آن‌گاه $P \in K^s$.

حال بگذارید Q نقطه‌ای باشد $(\overline{\overline{k}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle)$ ـ تعریف‌شدنی در K^r می‌خواهیم نشان دهیم که $Q \in k^r$. بنابه تعریف، توابع $g_1, \dots, g_r \in M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$ به گونه‌ای موجودند که:

۱۰. $g_1(Q) = \dots, g_r(Q) = 0$،

۱۱. $\det(\frac{\partial(g_1, \dots, g_r)}{\partial(x_1, \dots, x_r)})(Q) \neq 0$، و به‌علاوه

۱۲. $Q \in D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$.

نخست، این را که $Q \in k^r$، تحت افزودن شرایطی برای دنباله‌ی $g_1, \dots, g_r$ ثابت کرده این شرایط را در ادامه توجیه خواهم کرد. فعلاً بگیرید $V = \{P \in K^r : g_1(P) = \dots g_{r-1}(P) = 0\}$ (روشن است که می‌توانیم فرض کنیم $r \geq 2$)؛ نیز فرض کنید که

۱۳. $g_1, \dots, g_{r-1} \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$؛

۱۴. V زیرمجموعه‌ای است بسته از K^r، و $V \cap k^r$ زیرمجموعه‌ای است بسته از k^r،

۱۵. $V \subseteq D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$،

۱۶. برای هر $P \in V$، داریم $\det\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_{r-1})}{\partial(x_2, \dots, x_r)}\right)(P) \neq 0$،

۱۷. برای هر $P \in V$، هرگاه $g_r(P) = 0$، آن‌گاه $\det\left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_{r-1})}{\partial(x_1, \dots, x_r)}\right)(P) \neq 0$.

دقت کنید که در این‌جا همه‌ی فرض‌های لم ۳۰ برآورده شده‌اند. (این حقیقت که هر نقطه‌ی $(k, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در $K^r \cap V$ در k^r واقع است، از موارد ۱۵ و ۹ نتیجه می‌شود). به‌علاوه، ازآن‌جاکه Q نقطه‌ای است $(\overline{\overline{k}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle)$ ـ تعریف‌شدنی، بنا به مورد ۸ داریم $Q \in (K^-)^r$. بنابراین، لم ۳۰ را می‌توان با گرفتن $\alpha = Q_1$ و $P = \langle q_2, \dots, q_r \rangle$ (که $Q = \langle q_1, \dots, q_r \rangle$ است) به‌کار گرفت و بدینسان به $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, B_1, B_2 \in k$ رسید و به $\phi_i : (\gamma_2, \beta_2) \to K^{r-1}$ و $\psi_i : (\gamma_2, \beta_2) \cap k \to k^{r-1}$ (برای $i = 1, \dots, m$)، به گونه‌ای که نتیجه‌ی مورد جستجوی آن لم برآورده شود.

حال، بگذارید ϕ، یکی باشد از ϕ_i ها. توجه کنید که اگر $t \in (\gamma_2, \beta_2)$، آن‌گاه $\langle t, \phi(t) \rangle \in V$ و از این رو، (بنا به مورد ۱۵)، داریم $\langle t, \phi(t) \rangle \in D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$ پس برای هر $g \in M^r(\overline{\overline{K}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle)$، می‌توان تابعی چون $\overline{g} : (\gamma_2, \beta_2) \to K$ با ضابطه‌ی $\overline{g}(t) = g(t, \phi(t))$ تعریف کرد. روشن است که $\overline{g}$، تابعی است $\overline{\overline{K}}$ ـ تعریف‌شدنیِ بی‌نهایت‌بار دیفرانسیل‌پذیر. مشتق‌های

اوّلش، از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{d\overline{g}}{dt}(t) = \frac{\overline{\partial g}}{\partial x_۱}(t) + \sum_{i=۲}^{r} \frac{\overline{\partial g}}{\partial x_i}(t).\frac{d\phi^{(i)}}{dt}(t)$$

که در بالا $\phi(t) = \langle \phi^{(۲)}(t), \dots, \phi^{(r)}(t) \rangle$. فرمولِ بالا، البتّه برای توابع به‌طوریکنواخت‌صفرِ $\overline{g} = \overline{g}_۱, \dots, \overline{g}_{r-۱}$ نیز برقرار است و عملیاتِ جبری خطی موردِنیاز در زیر را برای حذف $\frac{d\phi^{(i)}}{dt}(t)$ و رسیدن به رابطه‌ی ۱۸، به خواننده واگذار کرده‌ام.

۱۸. برای همه‌ی t های بازه‌ی $(\gamma_۲, \beta_۲)$ داریم $\frac{d\overline{g}}{dt}(t) = (-۱)^{r+۱}\overline{J}(t).\overline{J}_۱(t)^{-۱}$.

که در آن

$$J(x_۱, \dots, x_r) = \det\left(\frac{\partial(g_۱, \dots, g_{r-۱}, g)}{\partial(x_۱, \dots, x_r)}\right)$$

و

$$J_۱(x_۱, \dots, x_r) = \det\left(\frac{\partial(g_۱, \dots, g_{r-۱})}{\partial(x_۲, \dots, x_r)}\right)$$

(توجه کنید که مورد ۱۸، قابل توجیه است، زیرا $J, J_۱ \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱} \rangle)$، و بنا به مورد ۱۶، برای هر $t \in (\gamma_۲, \beta_۲)$، داریم $\overline{J}_۱(t) \neq ۰$.) حال، r را زوج می‌انگارم و پیرایش‌های واضح مورد نیاز را برای تطبیق این بحث برای r های فرد، به خواننده واگذار می‌کنم.

ادّعای ۳۲.

۱. اگر $p \in (\gamma_۲, \beta_۲)$ و $\overline{g}_r(p) = ۰$، آنگاه $\frac{d\overline{g}_r}{dt}(p)$ ، هم‌علامتِ $\overline{J}_۱(p)$ است.

۲. $\overline{g}_r$ بیشینه، دارای یک صفر است.

اثبات. اثبات ۱. بنابه مورد ۱۷، داریم $\overline{J}(p) > ۰$ که در آن J، همانند آنچه در مورد ۱۸ آمده، با گرفتنِ $g = g_r$ تعریف شده‌است. بنابراین، مورد ۱ در بالا بی‌درنگ از مورد ۱۸ و زوج بودن r حاصل می‌شود.

اثبات ۲. توجه کنید که بنا به مورد ۱۶، $\overline{J}_۱$ در سرتاسر $(\gamma_۲, \beta_۲)$ ناصفر، و بنابراین در این بازه دارای یک علامتِ ثابت است. بنا به مورد ۱، هرگاه $\overline{g}_r(P) = \overline{g}_r(p_۲) = ۰$، آنگاه $\frac{d\overline{g}_r}{dt}(p_۱)$ و $\frac{d\overline{g}_r}{dt}(p_۲)$ هم‌علامتند. این امر (بنا به انتقال ویژگی‌ها از از $\overline{\mathbb{R}}$)، ناشدنی است مگر در حالتی که $\overline{g}_r$ تنها دارای یک صفر باشد. □

توجه کنید که موارد ۱۳ تا ۱۷، همه برای $\overline{\overline{k}}$ به جای $\overline{\overline{K}}$ و $V \cap k^r$ بجای V نیز برقراراند؛ زیرا هرکدام از این حکم‌ها، مشابه خود را برای $\overline{\overline{k}}$ و $V \cap k^r$ رانتیجه می‌دهد. بنابراین اگر ϕ را یکی از ψ_i ها بگیریم، بحثِ بالا هم‌چنان برای $\overline{\overline{k}}$ درست می‌ماند.

حال، برای هر $g \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle)$، بگذارید $\overline{g}(\phi_i, .)$ تابعِ ($\overline{\overline{K}}$ ـ تعریف‌شدنیِ) از $\{t \in K : \gamma_2 < t < \beta_2\}$ به K باشد که از بالا، با گرفتنِ $\phi_i = \phi$ به‌دست می‌آید و $\overline{g}(\psi_i, .)$، تابعِ ($\overline{\overline{k}}$ ـ تعریف‌شدنیِ) از $\{t \in k : \gamma_2 < t < \beta_2\}$ به k، که با گرفتنِ $\phi = \psi_i$ در بالا حاصل می‌شود (توجه کنید که $\gamma_2, \beta_2 \in k$). اثبات لم ۸ را، تحت شرایط افزوده‌شده، به‌گونه‌ی زیر پی می‌گیریم.

فرض‌کنید i_0، آن عددی (یکتا) باشد، که برای آن $1 \le i_0 \le m$ و $\phi_{i_0}(q_1) = \langle q_2, \ldots, q_r \rangle$. فرض کنید که $\overline{J}_1(\phi_{i_0}; q_1) > 0$. (اثبات برای $\overline{J}_1(\phi_{i_0}; q_1) < 0$ هم مشابهِ همین است). بگذارید

$$S = \{i : 1 \le i \le m \text{ و } \overline{J}_1(\phi_i; q_1) > 0\}$$

آن‌گاه، درست همانند آنچه در اثبات ادعای ۳۲ گفتیم، از مورد ۱۶ برمی‌آید که برای هر $i \in S$ و همه‌ی t های در بازه‌ی (γ_2, β_2) داریم $\overline{J}_1(\phi_i; t) > 0$، و برای همه‌ی i های واقع در مجموعه‌ی $\{1, \ldots, m\} - S$ و t های همان‌بازه، $\overline{J}_1(\phi_i; t) < 0$. به‌ویژه، برای $i \in S$، $\overline{J}_1(\phi_i, \gamma_1) > 0$ و برای $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus S$، داریم $\overline{J}_1(\phi_i, \gamma_1) < 0$. از لم ۳۰ (و ملاحظه‌ای که درآن‌جا آمده‌است) نتیجه می‌شود که یک زیرمجموعه‌ی، بگیریمش S'، از $\{1, \ldots, m\}$ وجود دارد، به طوری که

$$\{\psi_i(\gamma_1) : i \in S'\} = \{\phi_i(\gamma_1) : i \in S\}$$

و ازاین‌رو $\overline{J}_1(\psi_i; t) > 0$ (به‌ترتیب < 0) برای $i \in S'$ (به‌ترتیب برای $i \in \{1, \ldots, m\} - S'$) و $t \in (\gamma_2, \beta_2) \cap k$. حال، $\overline{\overline{k}}$ زیرساختاری است از $\overline{\overline{K}}$؛ از این رو روشن است (دوباره با کمک لم ۳۰) که برای همه‌ی t های متعلق به $((\gamma_2, \beta_2)) \cap k$، داریم $\{\phi_i(t) : t \in S\} = \{\psi_i(t) : t \in S'\}$.

حال $\gamma_3, \beta_3 \in k$ را به‌گونه‌ای برگزینید که $\gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_1$ و $\beta_1 < \beta_3 < \beta_3$، و برای هیچ i از میانِ $i \in \{1, \ldots, m\}$ توابع $\overline{g}_r(\phi_i; .)$ یا $\overline{g}_r(\psi_i; .)$ در γ_3 یا β_3 برابر با صفر نباشند. این امر امکان‌پذیر است، تنها نیاز است که تعدادی متناهی نقطه اجتباب کرد. از ادعای ۳۲ (و نسخه‌ی دیگر آن برای $\overline{\overline{k}}$) به‌روشنی برمی‌آید که اگر $i \in S$ (به‌ترتیب $i \in S'$) آن‌گاه $\overline{g}_r(\phi_i; .)$ دارای یک صفر است در (γ_3, β_3) (به‌ترتیب $g_i(\psi_i; .)$ دارای یک صفر است در $(\gamma_3, \beta_3) \cap k$ دارد)، اگروتنهااگر $\overline{g}_r(\phi_i; \gamma_3) < 0$ و $\overline{g}_r(\phi_i; \beta_3) > 0$ (به‌ترتیب $\overline{g}_r(\psi_i; \gamma_3) < 0$ و $\overline{g}_r(\psi_i; \beta_3) > 0$). ازاین‌رو داریم:

$$\begin{aligned} &\textbf{اندازه}\{i \in S : \exists t \in (\gamma_3, \beta_3) \quad \overline{g}_r(\phi_i; t) = 0\} \\ &= \textbf{اندازه}\{i \in S : \overline{g}_r(\phi_i, \gamma_3) < 0\} - \textbf{اندازه}\{i \in S : \overline{g}_r(\psi_i, \beta_3) < 0\} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &\textbf{اندازه}\{i \in S' : \exists t \in (\gamma_3, \beta_3) \cap k \quad \overline{g}_r(\psi_i; t) = 0\} \\ &= \textbf{اندازه}\{i \in S' : \overline{g}_r(\psi_i, \gamma_3) < 0\} - \textbf{اندازه}\{i \in S' : \overline{g}_r(\psi_i, \beta_3) < 0\}. \end{aligned}$$

ازطرفی، بنا به لم ۳۰ (و نیز بنا به این که $\overline{\overline{k}} \subseteq \overline{\overline{K}}$)، عبارات سمت راست در دو تساوی بالا با هم برابرند. در نتیجه (و دوباره با کمکِ لم ۳۰) هر نقطه‌ای چون $P = \langle p_۱, \ldots, p_r\rangle \in K^r$ که برآورنده‌ی شروط $P \in V$، $g_r(P) = ۰$، $J_۱(P) > ۰$، $\gamma_۳ < p_۱ < \beta_۳$، و $\|\langle p_۲, \ldots, p_r\rangle\| < B_۱$ باشد، در k^r واقع است. نقطه‌ی Q، چنان نقطه‌ای است.

در ادامه به توجیه فرض موارد ۱۳ تا ۱۷ می‌پردازیم. فرض کنید که $g_۱, \ldots, g_r$ و Q در شرطهای ۱۰ تا ۱۲ صدق کنند. دنباله‌ی $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ را به‌گونه‌ای (به صورت یک دنباله‌ی $\langle \overline{\sigma}', \sigma'_{n+۱}\rangle$) باز خواهم آراست که موارد ۸ و ۹ هم‌چنان برآورده‌شده باشند، و (برای $h_۱, \ldots, h_s \in M^s(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}', \sigma'_{n+۱}\rangle)$ یک $s \geq r$)؛ نیز یک نقطه‌ی $Q' \in K^s$ به‌گونه‌ای خواهم یافت که موارد ۱۰ تا ۱۷ با $h_۱, \ldots, h_s, Q'$ به جای $g_۱, \ldots, g_r, Q$ برآورده شوند. به‌علاوه $q_۱, \ldots, q_r$ درمیانِ درایه‌های Q' پدیدار خواهند شد. روشن است که رسیدن به این نقطه، برای توجیه فرضها کافی است. توابع و نقاط جدید در طیِ چندین مرحله ساخته خواهند شد؛ ولی برای پرهیز از انبوهیِ نمادها، در پایانِ هر مرحله به نمادهای اصلی (یعنی $g_۱, \ldots, g_r, Q$) بازخواهم‌گشت. شرطهای ۱۰ تا ۱۲ در هر یک از مراحل برآورده خواهند شد.

مرحله‌ی نخست. می‌توانیم فرض کنیم که برای هر متغیّرِ $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ ـ بستهٔ x، متغیرهای yو z وجود دارند، به گونه‌ای که هردوی $x.y^۲ - ۱$ و $(۱ - x).z^۲ - ۱$ در میانِ $g_۱, \ldots, g_r$ پدیدار شوند.

توجیه. فرض کنید x_i متغیری باشد $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ ـ بسته (که $۱ \leq i \leq r$). توابع $g^{r+۱}$ و $g^{r+۲}$ را در $M^{r+۲}(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle)$ با ضوابط $g_{r+۱}(x_۱, \ldots, x_{r+۱}) = x_i x^۲_{r+۱} - ۱$ و $g_{r+۲}(x_۱, \ldots, x_{r+۲}) = (۱ - x_i)x^۲_{r+۲} - ۱$ تعریف کنید. آن‌گاه، ازآن‌جا که (بنا به مورد ۱۲) $۰ < q_i < ۱$، می‌توانیم بگیریم $q_{r+۱} = +q_i^{-\frac{۱}{۲}}$ و $q_{r+۲} = +(۱ - q_i)^{-\frac{۱}{۲}}$؛ که ۱۰ و ۱۲ برای $g_۱, \ldots, g_{r+۲}$ و $\langle Q, q_{r+۱}, q_{r+۲}\rangle$ برآورده شوند. به‌علاوه، محاسبه‌ای آسان، به دست می‌دهد:

$$\det(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_{r+۲})}{\partial(x_۱, \ldots, x_{r+۲})})(Q, q_{r+۱}, q_{r+۲}) = \det(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_r)}{\partial(x_۱, \ldots, x_r)})(Q).۴.q_i^{\frac{۱}{۲}}.(۱ - q_i)^{\frac{۱}{۲}}$$

عبارتِ سمتِ راست در بالا بنا به مورد ۱۱ (برای $g_۱, \ldots, g_r$ و Q) ناصفر است. مورد ۱۱ در این سامانه‌ی جدید برقرار است. □

مرحله‌ی دوم. می‌توان فرض کرد که $g_۱, \ldots, g_{r-۱} \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$ و g_r به‌گونه‌ی $\sigma_{n+۱}(x_۱, \ldots, x_r) - x_e$ است که در آن x_e، متغیری $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱}\rangle$ ـ بسته نیست (و بنابراین درواقع در ترمِ $\sigma_{n+۱}(x_۱, \ldots. x_r)$ پدیدار نمی‌شود).

توجیه. بنا به تعریفِ $M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$، توابع $h_۱, \ldots, h_r$ در $M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})[x_{r+۱}]$ (که برابراست با $M^{r+۱}(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$) به گونه‌ای وجود دارند، که که برای $i = ۱, \ldots, r$ داریم

$$g_i(x_۱, \ldots, x_r) = h_i(x_۱, \ldots, x_r, \sigma_{n+۱}(x_۱, \ldots, x_r))$$

بگذارید $q_{r+1} = \sigma_{n+1}(q_1, \dots, q_r)$ و $Q' = \langle Q, q_{r+1} \rangle$ و $h_{r+1}(x_1, \dots, x_{r+1}) = \sigma_{n+1}(x_1, \dots, x_r) - x_{r+1}$. روشن است که موارد ۱۰ و ۱۲ برای $h_1, \dots, h_{r+1}$ و Q' برآورده می‌شوند، و همچنینند گام‌های نخست و دوم. برای مورد ۱۱، ماتریسِ $\frac{\partial(h_1,\dots,h_{r+1})}{\partial(x_1,\dots,x_{r+1})}(Q')$ را در نظر بگیرید. برای هر $i = 1, \dots, r$، سطرِ $r+1$ اُم را در $\frac{\partial h_i}{\partial x_{i+1}}(Q')$ ضرب کنید و حاصل را به سطرِ i اُم بیافزائید. با کمکِ قاعده‌ی زنجیری، ماتریسِ به‌دست‌آمده، دترمینانِ برابر با $-\det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)})(Q)$ دارد که بنا به مورد (قدیمِ) ۱۱ ناصفر است. $\square$

مرحله‌ی سوم. می‌توان فرض کرد که برای هر $P \in D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$، اگر $g_i(P) = 0$ برای $i = 1, \dots, r-1$، آن‌گاه داریم $\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1})}{\partial(x_2,\dots,x_r)}\right)(P) \neq 0$.

توجیه. بنا به مورد ۱۱، یک r (که $1 \le i \le r$) به گونه‌ای موجود است، که

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1})}{\partial(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_r)}\right)(Q) \neq 0.$$

با تغییر نام متغیرها، می‌توان فرض کرد که $i = 1$. (توجه کنید که برای هر $r, n \in \mathbb{N}$، مفهومِ (n, r) ـ دنباله، تحتِ جایگشتهای متغیرها ناورداست. به‌علاوه، نقاط تعریف‌شدنی برای دنباله‌های جایگردانیده، درست همان جایگشت‌های درایه‌های نقطه‌های تعریف‌پذیر برای دنباله‌ی اولیه‌اند. پس موارد ۸ و ۹ هم‌چنان برای دنباله‌های جایگردانیده نیز درست می‌مانند. روشن است که موارد ۱۰ تا ۱۲ و مراحل نخست و دوم نیز برای جایگشتهای مناسب از $g_1, \dots, g_r$ و Q هم‌چنان درست می‌مانند.) اکنون، بگذارید

$$h(x_1,\dots,x_{r+1}) = x_{r+1}.\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1})}{\partial(x_2,\dots,x_r)}\right)(x_1,\dots,x_r) - 1$$

و بگیرید

$$q_{r+1} = \det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1})}{\partial(x_2,\dots,x_r)}\right)(Q)^{-1}, \quad Q' = \langle Q, q_{r+1} \rangle.$$

آن‌گاه $g_1, \dots, g_{r-1}$ و h، g_r، و Q' هم‌چنان شرایط مراحل نخست و دوم و به‌روشنی، موارد ۱۰ و ۱۲ را برمی‌آورند. برای مورد ۱۱، از یک محاسبه‌ی آسان به دست می‌آید:

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},h,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_{r+1})}\right)(Q') = -\det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)})(Q).q_{r+1}^{-1}$$

که بنا به مورد (قدیمِ) ۱۱، دترمینان بالا ناصفر است.

سرانجام، فرض کنید $P \in D^{r+1}(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle, \overline{\overline{K}})$ و $g_1(P) = \ldots = g_{r-1}(P) = h(P) = 0$. بگیرید $P = \langle p_1, \dots, p_{r+1} \rangle$. ازآن‌جا که $h(P) = 0$، داریم $p_{r+1} \neq 0$ با محاسبات معمول می‌رسیم به $\det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},h)}{\partial(x_2,\dots,x_{r+1})})(P) = p_{r+1}^{-2} \neq 0$؛ و این همان است که همان‌که می‌خواهیم. $\square$

مرحله‌ی چهارم. می‌توان فرض کرد که برای همه‌ی $P \in D^r(\langle\overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle, \overline{\overline{K}})$، هرگاه $g_i(P) = 0$ برای هر $i = 1, \dots, r$، آن‌گاه $\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}\right)(P) < 0$.

توجیه. همانندِ اثباتِ مرحله‌ی دوم، $h \in M^r(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})[z]$ موجود است، به طوری که

$$\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}\right)(x_1,\dots,x_r) = h(x_1,\dots,x_r,\sigma_{n+1}(x_1,\dots,x_r)). \qquad (*)$$

تابعِ $H \in M^{r+1}(\overline{\overline{k}}, \overline{\overline{K}}, \overline{\sigma})$ را با ضابطه‌ی $H(x_1,\dots,x_{r+1} = x_{r+1}.h(x_1,\dots,x_r,x_e)$ تعریف کنید، که در آن e همان‌گونه است که در مرحله‌ی ۲ گفته شد (پس $1 \leq e \leq r$). اکنون، از آنجا که $g_r(q_1,\dots,q_r) = 0$، یعنی $\sigma_{n+1}(q_1,\dots,q_r) = q_e$، از (*) در بالا نتیجه می‌شود، که $h(q_1,\dots,q_r,q_e) = \det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_2,\dots,x_r)})(Q)$ که دترمینان بالا بنا به مورد ۱۱ ناصفر است. پس می‌توان گرفت $q_{r+1} = h(q_1,\dots,q_r,q_e)^{-1}$ و $Q' = \langle Q, q_{r+1}\rangle$، که در این صورت، موارد ۱۰ و ۱۲ و مراحلِ نخست و دوم، به‌روشنی توسط سامانه‌ی $g_1,\dots,g_{r-1},H,g_r,Q'$ برآورده می‌شوند. برای مشاهده‌ی برآورده‌شدن مرحله‌ی چهارم (و از این رو مورد ۱۱)، فرض کنید $\langle p_1,\dots,p_{r+1}\rangle = P \in D^{r+1}(\langle\overline{\sigma},\sigma_{n+1}\rangle, \overline{\overline{K}})$ و $g_1(P) = \dots = g_{r-1}(P) = g_r(P) = 0$. با محاسبه‌های معمول (بنا به (*) و این‌که $g_r(p_1,\dots,p_r) = 0$) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},H,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_{r+1})}\right)(P) = -\det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},g_r,H)}{\partial(x_1,\dots,x_{r+1})})(P)\\
&= -\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_r)}{\partial(x_1,\dots,x_r)}\right)(p_1,\dots,p_r).h(p_1,\dots,p_r,p_e)\\
&= -h(p_1,\dots,p_r,p_e)^2
\end{aligned}$$

حال، از آنجا که $H(P) = 0$، داریم $h(p_1,\dots,p_r,p_e) \neq 0$؛ که مرحله‌ی جهارم از آن نتیجه می‌شود. سرانجام، مرحله‌ی سوم نیز هم‌چنان برقرار است، زیرا اگر $P = \langle p_1,\dots,p_{r+1}\rangle$ نقطه‌ای باشد در $D^{r+1}(\langle\overline{\sigma},\sigma_{n+1}\rangle, \overline{\overline{K}})$، به طوری که $g_1(P) = \dots, g_{r-1}(P) = H(P) = 0$، آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&\det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},H)}{\partial(x_2,\dots,x_{r+1})}\right)(P)\\
&= \det\left(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1})}{\partial(x_2,\dots,x_r)}\right)(p_1,\dots,p_r).h(p_1,\dots,p_r,p_e)
\end{aligned}$$

که دترمینان بالا، بنا به مرحله‌ی (قدیمِ) سوم واین‌که $H(P) = 0$، ناصفر است. □

اثباتِ لمِ ۸ در اینجا فرجام می‌یابد؛ زیرا مورد ۱۳ از مرحله‌ی دوم، موارد ۱۴ و ۱۵ از مرحله‌ی اول، مورد ۱۶ از مرحله‌ی سوم، و مورد ۱۷ از مرحله‌ی چهارم نتیجه می‌شوند. به‌علاوه موارد ۸ تا ۱۲ در سرتاسر بحث محفوظ مانده‌اند.

در بخشِ بعدی، لم ۹ را برای تئوری $\tilde{T}$ ثابت (و بدین‌وسیله اثباتِ نخستین لمِ اصلی را تمام) خواهم کرد. این بخش را با بهترین نتیجه‌ای، که برقراری آن را برای تئوری ($\tilde{T}'$) می‌دانم، به پایان می‌برم. اثبات قضیه‌ی زیر، از لم ۸ به‌کاربرده‌شده برای $\tilde{T}'$) و لم ۷ حاصل می‌شود (اثبات لم ۷ در بخش ۲.۵، به‌راحتی، و حتی هموارتر، برای تئوریِ $\tilde{T}'$ نیز کار می‌کند).

قضیه ۳۳. بگذارید $H_1, \ldots, H_l$ یک زنجیره‌ی پفافی از توابع روی $\mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}, m \geq 1$) و $\tilde{\mathbb{R}}'$ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}; H_1, \ldots, H_l; r\rangle_{r\in C}$ باشند، که در آن C همان‌گونه که در آغاز بخش ۶ گفته‌ایم، انتخاب شده است. گیریم $\tilde{k}', \tilde{K}' \models \tilde{T}'$ و $\tilde{k}' \subseteq \tilde{K}'$، و فرض کنید برای هر $n, r \in \mathbb{N}$ و هر (n, r) ـ دنباله‌ی $\overline{\sigma}$، هر نقطه‌ی $(\tilde{k}', \overline{\sigma}')$ ـ تعریف‌شدنیِ $\langle p_1, \ldots, p_r\rangle$ از $(K')^r$، به ازای $B \in k'$، شرطِ $-B < p_i < B$ را (برای $i = 1, \ldots, r$) برآورد. (این شرط، به‌ویژه وقتی که $\tilde{K}'$ یک توسیعِ هم‌پایان از $\tilde{k}'$ است، رخ می‌دهد). آنگاه، برای هر فرمولِ وجودیِ $\phi(x_1, \ldots, x_e)$ در L'، و هر $a_1, \ldots, a_e \in k'$ داریم $\tilde{k}' \models \phi(a_1, \ldots, a_e)$ اگروتنهااگر $\tilde{K}' \models \phi(a_1, \ldots, a_e)$.

۸ اثبات لم ۹

در این بخش، به تئوری $\tilde{T}$ پرداخته‌ام. اثبات ارائه شده در این بخش برای لم ۹ برای $\tilde{T}'$ به کار نخواهد آمد؛ زیرا اثبات یاد شده، سختی متکی است بر قضیه‌ی ۲۶، که هیچ همتای آن را برای این وضعیت سراغ ندارم (می‌گویم «همتا»، زیرا قضیه‌ی ۲۶ آن‌چنان‌که هست، به عنوان مثال برای $\tilde{T}' =$ **تئوری**$(\langle\overline{\mathbb{R}}, \exp\rangle)$ که در آن exp نامحدود باشد، درمی‌ماند).

فرض کنید $\tilde{k}, \tilde{K} \models \tilde{T}$ ،$\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$ و $n, r \in \mathbb{N}$. بگذارید $\overline{\sigma} = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle$ یک (n, r) ـ دنباله باشد و فرض کنید برای هر $s \geq r$ هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی از K^s در k^s واقع شود. فرض کنید $\overline{\sigma}_{n+1}$ چنان باشد که $\langle \sigma, \sigma_{n+1}\rangle$ یک $(n+1, r)$ـ دنباله باشد. روشن است که باید نشان دهیم که هر نقطه‌ی $(\tilde{k}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle)$ ـ تعریف‌شدنی از K^r در $(K^-)^r$ جای دارد؛ که در آن همانندِ گذشته، $K^- = \{\alpha \in K : -\beta < \alpha < \beta \quad ,\beta \in K$ برای یک$\}$.

بگذارید $Q = \langle q_1, \ldots, q_r\rangle$ نقطه‌ای باشد $(\tilde{k}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle)$ ـ تعریف‌شدنی در K^r. آنگاه بنا به مراحلی که در بخشِ پیشین شرح داده شدند، می‌توان فرض کرد که ($r \geq 2$ و) توابع $g_1, \ldots, g_r \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle)$ موجودند، به طوری که

۱۹. $g_1, \ldots, g_{r-1} \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \overline{\sigma})$.

۲۰. تابع g_r به‌گونه‌ی $\sigma_{n+1}(x_1, \ldots, x_r) - x_e$ است، که در آن متغیر x_e، $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle$ ـ بسته نیست.

۲۱. برای $i = 1, \ldots, r$، داریم $g_i(Q) = 0$ و $\det\left(\frac{\partial(g_1, \ldots, g_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}\right)(Q) \neq 0$، و اگر بگیریم $V = \{P \in D^r(\overline{\sigma}, \tilde{K}) : g_i(P) = 0\}$، آنگاه

۲۲. $V \subseteq D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+۱} \rangle, \tilde{K})$ و V (به‌ترتیب $V \cap k^r$) زیرمجموعه‌ای است بسته از K^r (به‌ترتیب از k^r).

۲۳. برای همه‌ی $P \in V$ داریم $\det \left(\frac{\partial(g_۱,\ldots,g_{r-۱})}{\partial(x_۲,\ldots,x_r)} \right)(P) \neq ۰$.

۲۴. برای همه‌ی $P \in V$، اگر $g_r(P) = ۰$، آنگاه $\det \left(\frac{\partial(g_۱,\ldots,g_r)}{\partial(x_۱,\ldots,x_r)} \right)(P) \neq ۰$.

فرض‌های لم ۹ را می‌توان به صورت زیر، قوی‌تر کرد.

ادّعای ۳۴. فرض کنید $\chi(x_۱,\ldots,x_r)$ فرمولی باشد در $\overline{L}$ (زبانِ حلقه‌های مرتب). افزون‌براین، فرض کنید که برای نقطه‌ی $\langle p_۱,\ldots,p_r \rangle \in V$، داریم $\tilde{K} \models \chi(p_۱,\ldots,p_r)$. آنگاه، برای نقطه‌ای چون $\langle p_۱,\ldots,p_r \rangle \in V \cap k^r$، داریم $\tilde{k} \models \chi(p_۱,\ldots,p_r)$.

اثبات. با توجه به حذف سور و با کمک ترفندهای معمول، می‌توانیم $\chi(x_۱,\ldots,x_r)$ را به‌گونه‌ی $\exists x_{r+۱} \ldots \exists x_{r+t} \rho(x_۱,\ldots,x_{r+t}) = ۰$ در نظر بگیریم، که در آن ρ یک چندجمله‌ای است با ضرایبِ در k. بگیرید $g = \rho^۲ + \sum_{i=۱}^{r-۱} g_i^۲$. آنگاه (بنابه مورد ۱۹) $g \in M^{r+t}(\tilde{k}, \tilde{K}, \overline{\sigma})$ و $g(P) = ۰$، برای یک نقطه‌ی $P \in D^{r+t}(\overline{\sigma}, \tilde{K})$. بنا به لم ۷ یک $\langle P, P' \rangle \in D^{(r+t)+s}(\overline{\sigma}, \tilde{K})$ (برای یک $s \in \mathbb{N}$) موجود است، به طوری که $g(P) = ۰$، و $\langle P, P' \rangle$ نقطه‌ای است $(\tilde{k}, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی. بنا به فرض‌های لم ۹ داریم $\langle P, P' \rangle \in k^{(r+t)+s}$. روشن است که اگر $P = \langle p_۱,\ldots,p_{r+t} \rangle$، آنگاه نقطه‌ی $\langle p_۱,\ldots,p_r \rangle$ در ادعا صدق می‌کند. □

اکنون، برای رسیدن به تناقض، فرض می‌کنم که $Q \notin (I^-)^r$.

ادّعای ۳۵. $q_۱ \notin k$.

اثبات. فرض کنید $q_۱ \in k$. بگذارید $h(x_۱,\ldots,x_r) = x_۱ - q_۱$. آنگاه داریم $h \in M^r(\tilde{k}, \tilde{K}, \overline{\sigma})$ و $h(Q) = g_۱(Q) = \ldots g_{r-۱}(Q) = ۰$ و (بنا به مورد ۲۳)

$$\det \left(\frac{\partial(h, g_۱, \ldots, g_{r-۱})}{\partial(x_۱, \ldots, x_r)} \right)(Q) = \det(\frac{\partial(g_۱, \ldots, g_{r-۱})}{\partial(x_۲, \ldots, x_r)})(Q) \neq ۰.$$

بنابراین Q نقطه‌ای است $(\tilde{k}, \overline{\sigma})$ ـ تعریف‌شدنی در K^r است، پس باید در $k^r (\subseteq (K^-)^r)$ واقع باشد ـ تناقض. □

حال بنا به موارد ۱۹، ۲۲، ۲۳ و قضیه‌ی ۲۹ (و هم‌چنین توضیح‌های پس از اثباتِ قضیه‌ی ۲۹ یک پارامتربندی، برای مثال پارامتربندی $\{\langle I_j, \psi_j \rangle : ۱ \leq j \leq N\}$، برای $V \cap k^r$ در $\tilde{k}$ پیدا می‌شود (توجه کنید که بنا به ادعای ۳۴ داریم $V \cap k^r \neq \emptyset$). بگذارید $I_j = (a_j, b_j)$ که در آن $a_j \in k \cup \{-\infty\}$ و $b_j \in k \cup \{+\infty\}$، برای $j = ۱, \ldots, N$.

ادّعای ۳۶. یا $q_۱ \notin K^-$، و یا، در غیراین‌صورت، عنصر $j \in \{۱, \ldots, N\}$ موجود است، به طوری که برای هر α در k که $\alpha > ۰$، داریم یا $۰ < q_۱ - a_j < \alpha$، یا $۰ < b_j - q_۱ < \alpha$.

اثبات. گیریم $q_۱ \in K^-$. آن‌گاه باید برای یک $j \in \{۱, \ldots, N\}$ داشته باشیم $a_j < q_۱ < b_j$؛ زیرا در غیر این صورت، نقاط $a, b \in k$ به طوری پیدا می‌شوند، که $a < q_۱ < b$ و هیچ نقطه‌ی $\langle p_۱, \ldots, p_r \rangle \in V \cap k^r$ فرمولِ $a < x_۱ < b$ را برآورده نکند؛ و از این رو ادعای ۳۴ نقض می‌شود. بگیرید $a = \max\{a_j : ۱ \leq j \leq N$ و $a_j < q_۱ < b_j\}$ و $b = \min\{b_j : ۱ \leq j \leq N$ و $a_j < q_۱ < b_j\}$. برای رسیدن به تناقض، فرض کنید که یک $\alpha \in k$ که $\alpha > ۰$ موجود است، به طوری که $q_۱ - a > \alpha$ و $b - q_۱ > \alpha$. آن‌گاه $a < a + \alpha < q_۱ < b - \alpha < b$ پس، به‌روشنی $[a + \alpha, b - \alpha] \subseteq I_j$ برای هر j که $a_j < q_۱ < b_j$. (در حالتی که $a = -\infty$، عنصر $a + \alpha$ را با یک عضو از k کمتر از $q_۱$ چایگزین کنید. این، شدنی‌است زیرا $q_۱ \in K^-$. برای $b = \infty$ نیز به طور مشابه عمل کنید).

اکنون، از آنجا که توابع ψ_j پیوسته هستند، عنصر $B \in k$ به گونه‌ای موجود است، که $\|\psi_j(t)\| < B$، برای هر j که $a_j < q_۱ < b_j$، و $t \in k$ که $a + \alpha \leq t \leq b - \alpha$. حال بگذارید $c = \max(\{a + \alpha\} \cup \{b_j : b_j < q_۱\})$ و $d = \min(\{b - \alpha \cup \{a_j : a_j > q_۱\})$. آن‌گاه بنا به ادعای ۳۵ (و قضیه‌ی ۲۹) هیچ نقطه‌ای چون $\langle p_۱, \ldots, p_r \rangle$ وجود ندارد، به طوری که که $c < p_۱ < d$ و $B \geq \|\langle p_۲, \ldots, p_r \rangle\|$. ازآن‌جا که Q چنان نقطه‌ای است، ادعای ۳۴ نقض می‌شود. $\square$

اکنون، ادّعا می‌کنم که علاوه بر موارد ۱۹ تا ۲۴، می‌توان فرض کرد:

۲۵. برای هر $\alpha \in k$ داریم $q_۱ > \alpha$.

اگر ازپیش چنین نبوده باشد، بنا به ادعای ۳۶ یکی از موارد زیر برقرار است: (برای یک $a, b \in k$)، الف) برای همه‌ی $\alpha \in k$ داریم $q_۱ < \alpha$؛ یا ب) برای همه‌ی $\alpha \in k$ که $\alpha > ۰$ داریم $۰ < q_۱ - a < \alpha$؛ یا پ) برای همه‌ی $\alpha \in k$ که $\alpha > ۰$ داریم $۰ < b - q_۱ < \alpha$. تابعِ $h \in M^{r+۱}(\tilde{k}, \tilde{K}, \overline{\sigma})$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید:

$$h(x_۱, \ldots, x_{r+۱}) = \begin{cases} x_۱ + x_{r+۱} & \text{در حالتِ الف} \\ x_{r+۱}(x_۱ - a) - ۱ & \text{در حالتِ ب} \\ x_{r+۱}(b - x_۱) - ۱ & \text{در حالتِ پ} \end{cases}$$

درهمه‌ی این حالت، نقطه‌ای چون $q_{r+۱}$ در K به گونه‌ای یافت می‌شود، که $\langle Q, q_{r+۱} \rangle$ (که آن را Q' می‌نامیم) شرطِ $g_۱(Q') = \ldots = g_{r-۱}(Q') = h(Q') = g_r(Q') = ۰$ را برمی‌آورد. روشن است که $q_{r+۱} > \alpha$، برای همه‌ی $\alpha \in k$. به‌علاوه، با محاسبات معمول، می‌توان برقراری موارد ۱۹ تا ۲۲ و ۲۴،

را برای سامانه‌ی $g_1, \dots, g_{r-1}, h, g_r, Q'$ تحقیق کرد. در واقع،مورد ۲۳ نیز برقرار است؛ اما برای هدف فعلی، تنها این نکته (که بازهم با محاسبه‌ی مستقیم اثبات می‌شود) مهم است، که اگر $P \in K^{r+1}$ و $g_1(P) = \dots, g_{r-1}(P) = h(P) = 0$، آنگاه $\det(\frac{\partial(g_1,\dots,g_{r-1},h)}{\partial(x_1,\dots,x_r)})(P) \neq 0$. متغیرها را دوباره به گونه‌ای تغییر نام دهید، که (همان‌گونه که در توجیهِ مرحله‌ی ۳ در بخشِ ۷ دیدیم) که x_{r+1} بشود x_1. آنگاه موارد ۱۹ تا ۲۵ برای سامانه‌ی جدید برقراراند، و از این رو، همان نمادهای قبلی را دوباره به کار می‌آوریم.

ادّعای ۳۷. زیرمجموعه‌ی S از k، عنصرِ B از k، و عددِ گویای θ به گونه‌ای موجودند، که

۱. برای هر $\alpha \in S$ داریم $0 \leq \alpha \leq 1$؛

۲. برای هر $\langle p_1, \dots, p_r \rangle \in K^r$ که در آن $p_1 > B$ و $\langle p_1, \dots, p_r \rangle \in V$، و هر i که متغیرِ x_i به ازای آن $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle$ ـ بسته باشد، عنصر $a \in S$ به گونه‌ای موجود است، که $|p_i - a| < p_1^{-\theta}$.

اثبات. بنا به ادعای ۳۴ کافیست این ادّعا را برای k به جای K در ۲ ثابت کنیم؛ بنابراین، ادامه‌ی کار را در ساختار $\tilde{k}$ پی گرفته‌ایم. بگذارید $\mathcal{S}$ یک پارامتربندی برای $V \cap k^r$ در $\tilde{k}$، و فرض کنید در $\langle I, \psi \rangle \in \mathcal{S}$ بازه‌ی I از راست نامحدود باشد. بگیرید $\psi = \langle \psi_2, \dots, \psi_r \rangle$. فرض کنید x_i متغیری باشد $\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1} \rangle$ ـ بسته. بنا به موارد ۲۲ و ۲۵، داریم $r \geq i \geq 2$ و $1 > \psi_i(t) > 0$، برای همه‌ی $t \in I$. از قضیه‌ی ۲۶ (با گرفتنِ $\tilde{K} = \tilde{k}$ و $g = \psi_i$) نتیجه می‌شود، که هنگاهی که $t \to \infty$، داریم $\psi_i(t) \to a_i$ برای یک $a_i \in k$ به طوری، که $0 \leq a_i \leq 1$. نیز با به‌کار گرفتنِ دوباره‌ی قضیه‌ی ۲۶ برای $g = \psi_i - a_i$، عددی گویا چون θ یافت می‌شود، به طوری که برای t های به‌اندازه‌ی کافی‌بزرگ، داریم $|\psi_i(t) - a_i| < t^{-\theta_i}$. اکنون ازآن‌جاکه تنها تعداد متناهی انتخاب برای $\langle I, \psi \rangle$ و i ممکن است، ادّعا اثبات می‌شود. □

ادّعای ۳۸. عددِ صحیحِ μ و عنصرِ B' در k به گونه‌ای موجودند، که برای هر $\langle p_1, \dots, p_r \in V \cap k^r \rangle$ که در آن $p_1 > B'$، داریم $|g_r(p_1, \dots, p_r)| > p_1^{-\mu_1}$.

اثبات. بنا به مورد ۲۴ و نتیجه‌ی ۱۲ تابع g_r دارای تعداد متناهی صفر در $V \cap k^r$ است. اکنون با به‌کارگیری قضیه‌ی ۲۶ و با بحثی مشابه آنکه در اثبات ۳۷ آمد، ادعا ثابت می‌شود (بگیرید $(g(t) = g_r(t, \psi_2(t), \dots, \psi_r(t))$. □

اگر می‌شد نشان داد که ادعای ۳۸ برای V بجای $V \cap k^r$ نیز درست است، کار تمام بود. برای دستیابی به این هدف، به تابع g_r با یک چندجمله‌ای (به‌طورِ یکنواخت در $\tilde{k}$ و $\tilde{K}$) نزدیک شده از ادعای ۳۴ استفاده می‌کنیم.

بنا به مورد ۲۰، تابع $g_r(x_1, \dots, x_r)$ به صورت $\sigma_{n+1}(x_1, \dots, x_r) - x_e$ است؛ بنابه تعریف ۱ ترم $\sigma_{n+1}(x_1, \dots, x_r)$، به صورت $F_i(y_1, \dots, y_m)$ است برای یک $i = 1, \dots, l$ و $y_1, \dots, y_m \in$

$\{\cdot, 1, x_1, \ldots, x_r\}$. اکنون (با بحث در ساختار $\mathbb{R}$) توابع $G_i : U \to \mathbb{R}$ را (نگا بخشِ ۱) در نظر بگیرید. به یاد آورید که U مجموعه‌ای باز و شامل جعبه‌ی $[\cdot, 1]^m$ است، G_i تابعی است C^∞ (و درواقع تحلیلی) روی U، و داریم $G_i \restriction [\cdot, 1]^m = F_i \restriction [\cdot, 1]^m$. ازاین‌پس، به جای F_i و G_i به‌ترتیب خواهیم نوشت F و G.

بنا به فشرده بودن $[\cdot, 1]^m$ عددِ گویای مثبتِ ϵ موجود است، که برای هر P در $[\cdot, 1]^m$ گوی $B_\epsilon(P)$ (منظور گوی بازِ با مرکزِ P و شعاعِ ϵ است در $\mathbb{R}^m$) در U واقع است. به علاوه، فرض می‌کنیم که G و همه‌ی مشتق‌های آن (هر چند نه لزوماً یکنواخت)، روی $\bigcup\{B_\epsilon(P) : P \in [\cdot, 1]^m\}$ کراندارند. بنا به قضیه‌ی تیلور با فرمِ لاگرانژ برای باقیمانده،

$$G(p_1 + t_1, \ldots, p_m + t_m) = \sum_{i=\cdot}^{\lambda} \left[\frac{1}{i!} (\sum_{j=1}^{m} t_j \frac{\partial}{\partial x_j})^i G \right] (P) + R_\lambda \qquad (۳۰)$$

برای همه‌ی $P = \langle p_1, \ldots, p_m \rangle \in [\cdot, 1]^m$، $\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in B_\epsilon(\cdot)$ و $\lambda \in \mathbb{N}$، که در آن

$$R_\lambda = \left[\frac{1}{(\lambda+1)!} (\sum_{j=1}^{m} t_j \frac{\partial}{\partial x_j})^{\lambda+1} G \right] (P') \qquad (۳۱)$$

برای یک $P' \in B_\epsilon(P)$.

از فرضِ کراندار بودن G نتیجه می‌شود که برای هر $\lambda \in \mathbb{N}$، عنصر $C_\lambda \in \mathbb{N}$ به گونه‌ای وجود دارد، که برای هر $\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in B_\epsilon(\cdot)$

$$|R_\lambda| < C_\lambda . (\max\{|t_i| : 1 \le i \le m\})^{\lambda+1}. \qquad (۳۲)$$

حال از موارد ۱ و ۲ (آغازِ بخشِ ۱ را ببینید) و ۲۶ و ۲۸ نتیجه می‌شود که برای همه‌ی $\lambda \in \mathbb{N}$ و و همه‌ی چندجمله‌ای‌های یکانیِ $\pi(x_1, \ldots, x_m)$ از درجه‌ی کمتر یا مساویِ λ، ترم‌های $\tau_\pi^\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ از $\tilde{L}$ موجودند، به طوری که برای همه‌ی $\langle p_1, \ldots, p_m \rangle \in [\cdot, 1]^m$ و $\langle t_1, \ldots, t_m \rangle \in B_\epsilon(\cdot)$ به گونه‌ای که $\langle p_1 + t_1, \ldots, p_m + t_m \rangle \in B_\epsilon(P) \cap [\cdot, 1]^m$، داریم

$$\begin{aligned} &|\lambda! F(p_1 + t_1, \ldots, p_m + t_m) - \sum_{\pi}^{(\lambda)} \tau_\pi^\lambda (P) . \pi(t_1, \ldots, t_m)| \\ &< \lambda! C_\lambda (\max\{|t_i| : 1 \le i < m\})^{\lambda+1} \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که جمع، روی چندجمله‌های یکانیِ با درجه‌ی کمتر یا مساوی با λ زده شده است.

اکنون، می‌خواهم مورد ۲۹ را در ساختارهای $\tilde{K}$ و $\tilde{k}$ به‌کار گیرم. یادآوری می‌کنم که $\sigma_{n+1}(x_1, \ldots, x_r)$، به صورت $F(y_1, \ldots, y_m)$ است، برای یک $y_1, \ldots, y_m \in$

$\{0, 1, x_1, \ldots, x_r\}$. بنابراین، برای هر $\langle p_1, \ldots, p_r\rangle \in K^r$ و $i = 1, \ldots, m$، تعریف می‌کنم

$$p'_i = \begin{cases} 0 & \text{اگر } y_i = 0 \\ 1 & \text{اگر } y_i = 1 \\ p_j & \text{اگر } y_i = x_j \end{cases} .$$

پس، اگر $\langle p_1, \ldots, p_r\rangle \in D^r(\langle \overline{\sigma}, \sigma_{n+1}\rangle, \tilde{K})$ (به‌ویژه، اگر $\langle p_1, \ldots, p_r\rangle \in V$، ۲۲ را ببینید)، آن‌گاه برای $i = 1, \ldots, m$، داریم $0 \leq p'_i \leq 1$ و $\sigma_{n+1}(p_1, \ldots, p_r) = F(p'_1, \ldots, p'_m)$. حال بگذارید S, θ, B همانند آنهایی باشند که در ۳۷ آمد، μ, B' مانندِ ادعای ۳۸ و λ_0 یک عددِ صحیح باشند بزرگ‌تر از $\frac{\mu+1}{\theta}$.

نقطه‌ی $Q \in K^r$ را درنظر بگیرید. داریم $Q \in V$ و (بنا به مورد ۲۵) $q_1 > B$. بنابراین a_i (برای $i = 1, \ldots, m$) را عنصرِ یکتای $a \in S \cup \{0, 1\}$ می‌گیریم که برای آن $|q'_i - a| < q_1^{-\theta}$. توجه کنید که برای $i = 1, \ldots, m$، داریم $a_i \in k$ و $0 \leq a_i \leq 1$. به‌علاوه داریم $\langle q'_1 - a_1, \ldots, q'_m - a_m\rangle \in B_\epsilon(0)$ (زیرا $0 \leq q_1^{-\theta} < \epsilon$ که در آن ϵ و θ گویای مثبتند) و $\langle q'_1, \ldots, q'_m\rangle \in B_\epsilon(\langle a_1, \ldots, a_m\rangle) \cap [0, 1]^m$. همچنین $g_r(Q) = 0$، پس، $F(q'_1, \ldots, q'_m) = q_e$. با به‌کاربستنِ مورد ۲۹ در ساختار $\tilde{K}$ می‌گیریم:

$$\left| \lambda_0! q_e - \sum_{\pi}^{(\lambda_0)} \tau_\pi^{\lambda_0}(a_1, \ldots, a_m).\pi(q'_1 - a_1, \ldots, q'_m - a_m) \right| < \lambda_0! C_{\lambda_0}.q_1^{\theta(\lambda_0+1)}. \quad (۳۴)$$

هم‌چنین، روشن است که

$$q_1 > \max(B'.2C_\lambda, \epsilon^{-\theta^{-1}}) \quad (۳۵)$$

و

$$|q'_i - a_i| < q_1^{-\theta} \quad \text{برای } i = 1, \ldots, m. \quad (۳۶)$$

حال از آن‌جا که $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$، همه‌ی $\tau_\pi^{\lambda_0}(a_1, \ldots, a_m)$ ها،عناصری هستند در k (و ارزش این ترم در $\tilde{k}$ و $\tilde{K}$ یکسان است). بنابراین، عطف ۳۰، ۳۱، و ۳۲ را می‌توان به‌صورتِ $\chi(q_1, \ldots, q_r)$ نمایاند، که در آن $\chi(x_1, \ldots, x_r)$ فرمولی است در $\overline{L}$ با پارامتر در k. از ادعای ۳۴ نتیجه می‌شود، که که موارد ۳۰، ۳۱ و ۳۲ برای یک $\langle \overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_r\rangle \in V \cap k^r$ به جای $\langle q_1, \ldots, q_r\rangle$ برقرارند. همچنین، مورد ۲۹ را می‌توان در $\tilde{k}$ با گرفتنِ $p_i = a_i$ و $t_i = \overline{p}'_i - a_i$ در نظر گرفت. (بنا به مورد جدیدِ ۳۱ و مورد ۳۲ داریم $\langle t_1, \ldots, t_m\rangle \in B_\epsilon(0)$ و $\langle a_1 + t_1, \ldots, a_m + t_m\rangle \in B_\epsilon(\langle a_1, \ldots, a_m\rangle) \cap [0, 1]^m$؛

زیرا $\langle \overline{p}_۱, \dots \overline{p}_r\rangle \in V$، که در آن همه‌ی مفاهیم در $\tilde{k}$ تعبیر شده‌اند). آمیختنِ این با مورد جدید ۳۰ (و با کمکِ مورد جدید ۳۲) می‌دهد:

$$\begin{aligned} |F(\overline{p}'_۱, \dots, \overline{p}'_m) - p_e| &< ۲C_\lambda . \overline{p}_۱^{-\theta(\lambda_۰+۱)} \\ &< ۲C_\lambda . \overline{p}_۱^{-\mu-۱} && \text{بنا به انتخابِ } \lambda_۰ \\ &< \overline{p}_۱^{-\mu} && \text{بنا به ۳۱ جدید} \end{aligned}$$

یعنی $|g_r((\overline{p})_۱, \dots, \overline{p}_۱)| < \overline{p}_۱^{-\mu}$ در $\tilde{k}$ درست است. ازآن‌جا که (بنا به مورد جدید ۳۱) $\overline{p}_۱ > B'$، این گفته، ادعای ۳۸ را نقض و لم ۹ را ثابت می‌کند. **اثباتِ نخستین قضیه‌ی اصلی در اینجا فرجام می‌یابد.**

۹ به سوی اثباتِ دومین قضیه‌ی اصلی

منظور قضیه‌ای است که می‌گفت تئوریِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp\rangle$ مدل‌کامل است. نشانه‌ی $\exp$ دراین‌جا نشانگرِ تابعِ نمائیِ $x \mapsto e^x$ است که در **سرتاسر** $\mathbb{R}$ تعریف شده است؛ و چون گذشته، $\overline{\mathbb{R}}$ میدان ترتیبیِ اعدادِ حقیقی را (در زبانِ حلقه‌های ترتیبی) نشان می‌دهد. بیائید تئوری و زبانِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp\rangle$ را به‌ترتیب با $T_{\exp}$ و $L_{\exp}$ بنمایانیم. بنا به جُستارِ کوتاهی که در بخش ۱ درباره‌ی مدل‌کامل بودن آمد، باید نشان دهیم که اگر $k, K \models T_{\exp}$ و k زیرساختاری باشد از K، آنگاه هر جمله‌ی وجودیِ برقرار در ساختارِ K و با پارامتر در k، در ساختار k نیز درست است.

بیائید $k, K \models T_{\exp}$ را که در آن k زیرساختاری است از K، برای مانده‌ی این بخش برجا بداریم. ازاین‌جا به بعد، برای ساختارها و دامنه‌ی آنها، و نیز برای ترم‌ها و تعبیر آنها در یک ساختار، نمادهای جداگانه به‌کار نبرده‌ام.

قضیه‌ی ۳۳ را برای حالت ۱ $= l = m$، $\emptyset = C$، $\exp = H_۱$، $K = \tilde{K}'$ و $k = \tilde{k}'$ در نظر بگیرید. بنا به این نتیجه، کافی است نشان دهیم که هرگاه $n \in \mathbb{N}$ و $f_۱, \dots, f_n \in k[x_۱, \dots, x_n, \exp(x_۱), \dots, \exp(x_n)]$، آنگاه یک عنصر $b \in k$ وجود دارد، به گونه‌ای که اگر $\overline{\alpha} = \langle \alpha_۱, \dots, \alpha_n\rangle \in K^n$ شرطِ $f_۱(\overline{\alpha}) = \dots, f_n(\overline{\alpha}) = ۰$ را برآورد و $J(f_۱, \dots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq ۰$، (که در آن مانندِ گذشته $J(f_۱, \dots, f_n)$ دترمینانِ ماتریسِ ژاکوبیِ $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{۱\leq i,j\leq n}$ را می‌نمایاند)، آنگاه برای $i = ۱, \dots, n$ داریم $|\alpha_i| < b$. (امکان تقلیل پرسش مدل‌کاملی ساختار $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp\rangle$ به این صورت، پیش‌تر در [۱۴] (قضیه‌ی ۲) تثبیت شده است.)

این را با استقرا روی تعدادِ پدید آمدن تابع نمایی در $f_۱, \dots, f_n$ ثابت می‌کنیم. در حذفِ یک تابعِ نمائی، متغیرهای جدیدی را به همراهِ تابع‌نمایی آنها وارد خواهیم کرد، اما به‌گونه‌ای که تنها مقادیری از این متغیرهای جدید مهم باشد، که بین ۰ و ۱ واقعند. بنا به مدل‌کاملیِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp|_{[۰,۱]}\rangle$ (که از نخستین قضیه‌ی اصلی نتیجه می‌شود، بخشِ ۱ مثالِ الف را ببینید) این روش هیچ مانعی در گامِ پایه‌ی

استقرا نخواهد نهاد. پرهیز از استفاده از توابع محدودشده کار را از لحاظ فنی آسان‌تر می‌کند. ازاین‌رو، تابعِ e را (در هرمدل از تئوری $T_{\exp}$) به صورت $e(x) = \exp((۱ + x^۲)^{-۱})$ تعریف می‌کنم (بخشِ ۱ مثالِ الف را دوباره ببینید).

تعریف ۳۹. گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $s \subseteq \{۱, \ldots, n\}$. آن‌گاه با M_n^s حلقه‌ای متشکل از توابع از K^n به K را نشان می‌دهیم، که (به عنوان حلقه) روی k (به عنوان میدانی از توابع ثابت) توسط x_i، $(۱ + x_i^۲)^{-۱}$، $e(x_i)$، (برای $i = ۱, \ldots, n$) و $\exp(x_i)$ (برای $i \in S$) تولید شده است.

توجه کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $s \subseteq \{۱, \ldots, n\}$، حلقه‌ی M_n^s حلقه‌ای است نوتری از توابع Kـ تعریف‌شدنیِ C^∞ (از منظر K) از K^n به K است. به‌علاوه، M_n^s تحتِ دیفرانسیل‌پذیری بسته است؛ پس، به‌ویژه برای هر $f_۱, \ldots, f_n \in M_n^s$ داریم $J(f_۱, \ldots, f_n) \in M_n^s$. از این رو، نتایجِ بخشهای ۴ و ۵ در این‌جا هم مورد استفاده هستند؛ آن‌ها را به صورتی که در این بخش نیاز است، در زیر خلاصه کرده‌ام.

گزاره ۴۰. گیریم $n \in \mathbb{N}$ و $s \subseteq \{۱, \ldots, n\}$.

۱. فرض کنید $f \in M_n^s$، $\overline{\alpha} \in K^n$، و $f(\overline{\alpha}) = ۰$. آن‌گاه توابع $f_۱, \ldots, f_n \in M_n^s$ و $\overline{\beta} \in K^n$ به گونه‌ای موجودند، که $f(\overline{\beta}) = f_۱(\overline{\beta}) = \ldots = f_n(\overline{\beta}) = ۰$ و $J(f_۱, \ldots, f_n)(\overline{\beta}) \neq ۰$.

۲. اگر در مورد ۱، $\overline{\alpha}$ صفری تنها باشد از f، می‌توان گرفت $\overline{\beta} = \overline{\alpha}$.

۳. گیریم $f_۱, \ldots, f_n \in M_n^s$. آن‌گاه، تنها متناهی $\overline{\gamma} \in K^n$ وجود دارند، به طوری که $f_۱(\overline{\gamma}) = \ldots, f_n(\overline{\gamma}) = ۰$ و $J(f_۱, \ldots, f_n)(\overline{\gamma}) \neq ۰$.

اثبات. برای مورد ۱، قضیه‌ی ۲۵ را برای $\overline{\overline{T}} = T_{\exp}$، $\overline{\overline{K}} = K$، $M = M_n^s$، $U = K^n$ و $S = \{\overline{\gamma} \in K^n : f(\overline{\gamma}) = ۰\}(= V(f))$ به‌کارگیرید.

برای ۲، قضیه‌ی ۲۳ را پی‌درپی (برای $\{$یک همسایگیِ بازِαدر K^n.است $[U : U \restriction g]\} = M$، $\overline{\overline{T}} = T_{\exp}$ و $\overline{\overline{K}} = K$ و $P. = \overline{\alpha}$) برای $m = ۰, \ldots, n - ۱$ به‌کارگیرید. سرانجام به توابع $f_۱, \ldots, f_n \in M_n^s$ خواهیم رسید، به طوری که $\overline{\alpha} \in V^{ns}(f_۱, \ldots, f_n)$؛ زیرا در غیر این صورت، مورد ۲ در قضیه‌ی ۲۳ برای توابعی چون $f_۱, \ldots, f_m$ با $m < n$، و به‌ویژه برای $[h, W] = [f, K^n]$ رخ خواهد داد؛ و در این صورت قضیه‌ی تابعِ ضمنی اعمال‌شده به K، و نیز اینکه $\overline{\alpha}$ صفری تنها برای f است، نقض خواهد شد (آغازِ بخشِ ۴ را ببینید).

سرآخر، توجه کنید که دنباله‌ی

$$(۱ + x_۱^۲)^{-۱}, \ldots, (۱ + x_n^۲)^{-۱}, e(x_۱), \ldots, e(x_n), \exp(x_{i_۱}), \ldots, \exp(x_{i_m})$$

که در آن $s = \{i_۱, \ldots, i_m\}$، زنجیره‌ی است پِفافی روی $\mathbb{R}^n$. حکمِ مورد ۳ با انتقال گزاره‌ی ۱۰ به K حاصل می‌شود. $\square$

دومین قضیه‌ی اصلی را نادرست فرض می‌کنیم. بنابه بحث‌های بالا، عنصر $m \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که

$(*)_m$ برای یک $n \in \mathbb{N}$ که $n \geq m$، موجودند: $\overline{\alpha} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in K^n$، $l \in \{1, \dots, n\}$ و $s \subseteq \{1, \dots n\}$ با $m = $ (s)**اندازه**؛ به طوری که برای $f_1, \dots, f_n \in M_n^s$ داریم

$$f_1(\alpha) = \dots f_n(\alpha) = 0 \neq J(f_1, \dots, f_n)(\overline{\alpha}).$$

به‌علاوه برای همه‌ی $b \in k$، داریم $|a_l| > b$؛ نیز اگر $m > 0$ آن‌گاه $l \in s$.

(هرچند بنابه آن‌چه که در بالا آمد، می‌شد بگیریم $n = m$؛ ولی، همان‌گونه که پیش از این هم گفتیم، قرار است m را به‌قیمتِ افزودنِ متغیرها و e ـ ترم‌های دیگر کاهش دهیم).

عدد m را کمینه‌عددی بگیرید که $(*)_m$ برقرار است. نخست ادّعا می‌کنم که $m > 0$. ساختاری را درنظر گیرید با دامنه و ساختارِ حلقه‌ترتیبیِ یکسان با K، ولی به گونه‌ای که در آن e جای exp را گرفته باشد. این ساختار را K' بنامید؛ و به همین ترتیب k' را از k تعریف کنید. . روشن است که k' زیرساختاری است از K، و این‌هردو، مدل‌های تئوریِ کاملِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp \rangle$ هستند؛ ولی، بنا به مثالِ الفِ در بخشِ ۱ این تئوری، مدل‌کامل است. پس $(*)$. و مورد ۳ در گزاره‌ی ۴۰ نقض می‌شود. حال برای عنصرِ کمینه‌ی ناصفر m، بگذارید $n, \overline{\alpha}, n, s, l$ و $f_1, \dots, f_n$ گواهان برقراری $(*)_m$ باشند. در آخرین بخش از مقاله، ویژگی مطلوبی برای عناصر در مدل‌های تئوری $T_{\exp}$ و نماهای آنها ثابت خواهم کرد، که از آن نتیجه شود:

۴۱. اعدادِ صحیحِ n_i (برای $i \in s$)، همه‌ناصفر، و $c \in k$ موجودند، به طوری که

$$c + \sum_{i \in s} n_i \alpha_i < 1.$$

توجه کنید که با فرضِ درستی ۴۱، از آنجا که برای هر b در k، داریم $|\alpha_l| > B$، نمی‌توان برای هر i در $s - \{l\}$ داشت $n_i = 0$. برای آسانتر شدن بحث، فرض کنید $1 \in s$ ، $n_1 \neq 0$ و $l \neq 1$. هم‌چنین فرض می‌کنیم که $n_1 > 0$؛ زیرا اگر $n_1 < 0$، می‌شود در ۴۱ n_i ها را (برای $i \in s$) با $-n_i$ و c را با $1 - c$ جایگزین کرد. حال، بگیرید $\alpha_{n+1} = \exp(\alpha_1)$ و $\alpha_{n+2} \in K$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید، که $\alpha_{n+2} > 0$ و $(1 + \alpha_{n+2}^2)^{-1} = c + \sum_{i \in s} n_i \alpha_i$. این انتخاب، شدنی است زیرا K، به‌عنوانِ میدان، بسته‌ی حقیقی است.

فرض کنید $g_i(x_1, \dots, x_{n+1})$ از جایگزینی x_{n+1} با $\exp(x_1)$ در $f_i(x_1, \dots, x_n)$ حاصل شده

باشد. آنگاه $g_i \in M_{n+1}^{s-1}$ و به‌روشنی، $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+2} \rangle$ پاسخی از سامانه‌ی زیر از معادلات است.

$$\Lambda(x_1, \dots, x_{n+2}) : \begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0, \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0, \\ (1 + x_{n+2}^2)^{-1} - c - \sum_{i \in s} n_i x_i = 0, \\ x_{n+1}^{n_1} . \exp(c) . \prod_{j \in s^+} \exp(x_j)^{n_j} \\ -e(x_{n+2}) . \prod_{j \in s^-} \exp(x_j)^{-n_j} = 0, \end{cases}$$

که درآن $s^{\pm} = \{j \in s, j > 1 \text{ و } \pm n_j > 0\}$. (برابریِ آخر از به‌نمارساندنِ برابریِ یکیِ‌مانده‌به‌آخر و جای‌گزین‌کردنِ $\exp(x_1)$ با x_{n+1} و بازچینشِ آن، حاصل شده است. ضربِ تهی، برابرِ یک تعبیر شده است.)

اکنون بنابه گزاره‌ی ۴۰ قسمتِ ۳، یک همسایگیِ بازِ Kـ تعریف‌شدنیِ، به عنوان مثال U، از $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ (در K^n) موجود است، به طوری که $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ تنها پاسخِ معادله‌ی

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \neq J(f_1, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_n)$$

در U است. از آنجا که

$$J(f_1, \dots, f_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0$$

در واقع می‌توان فرض کرد، که $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$ تنها پاسخِ معادله‌ی $f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots, f_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ در U است. ادّعا می‌کنم که $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+2} \rangle$ تنها پاسخِ سامانه‌ی $\Lambda(x_1, \dots, x_{n+2})$ است، واقع در زیرمجموعه‌ی بازِ $U \times K^+ \times K^+$ از K^{n+2} (که $K^+ = \{a \in K : a > 0\}$). برای اثبات ادعا فرض کنید، که $\langle \beta_1, \dots, \beta_{n+2} \rangle$ چنان پاسخی باشد. ازآنجا که $\beta_{n+1} > 0$ و $n_1 \neq 0$، دو برابریِ آخر ایجاب می‌کنند، که $\beta_{n+1} = \exp(\beta_1)$. حال، بنا به n برابریِ اوّل، برای $i = 1, \dots, n$ داریم $f_i(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$. نیز $\beta_{n+1} = \exp(\beta_1) = \exp(\alpha_1) = \alpha_{n+1}$. سرانجام، برابریِ یکی‌مانده‌به‌آخر به‌همراهِ شرطِ $\beta_{n+2} > 0$ ایجاب می‌کند، که $\beta_{n+2} = \alpha_{n+2}$.

حال بگذارید f، مجموعِ مربع‌های $n + 2$ تابع پدیدار در $\Lambda(x_1, \dots, x_{n+2})$ باشد. آنگاه $f \in M_{n+2}^{s-\{1\}}$ (توجه کنید که $c, \exp(c) \in k$) و نشان داده‌ایم که $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{n+2} \rangle$ یک صفرِ تنها از f است. از قسمت دوم گزاره‌ی ؟؟ نتیجه می‌شود که، توابع $h_1, \dots, h_{n+2} \in M_{n+2}^{s-\{1\}}$ موجودند، به طوری که

$$h_1(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}) = \dots = h_{n+2}(\alpha_1, \alpha_{n+2}) = 0 \neq J(h_1, \dots, h_{n+2})(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2}).$$

از این، ازآن‌جاکه $l \in s - \{۱\}$ نتیجه می‌شود، که $(*)_{m-۱}$ برقرار است؛ این امر کمینگیِ m را نقض و دومین قضیه‌ی اصلی را به‌شرط اثبات شدن ۴۱ اثبات می‌کند.

۱۰ تئوریهای کمینه‌ی ترتیبیِ هموار

در بخشِ ۲، آنجا که می‌خواستیم برای توابع تعریف‌پذیر در ساختارهای تحتِ پوشش نخستین قضیه‌ی اول فرمول‌های تجانبی بیابیم، به مفهومِ ترتیبْ‌کمینگی دست سوده‌ایم. در این بخش به تحلیل تجانبیِ عمیق‌تری نیازمندیم. خواننده را آشنا با ویژگی‌های کلّیِ ساختارهای کمینه‌ی ترتیبی [۲۸] فرض کرده‌ام. این‌ها را می‌توان در مقالات بنیادی [۱۰] و [۷] یافت (پیشرفت‌های اخیر را نیز در [۱۲] بیابید).

در این بخش، فرض کرده‌ایم $\tilde{\mathbb{R}}$ یک کِشِشِ کمینه‌ی ترتیبی از میدانِ مرتب $\overline{\mathbb{R}}$ باشد و $\tilde{T}$ تئوریِ کامل $\tilde{\mathbb{R}}$. در این صورت $\tilde{T}$ توابع تعریف‌شدنی اسکولم می‌پذیرد، و بستارِ $\{۰\}$ تحتِ این توابع، در هر مدل از $\tilde{T}$ از $\tilde{K}$، یک زیرساختارِ مقدماتی با ترتیبی ارشمیدسی از K است. (زیرا $\tilde{T}$ کامل است و یک مدلِ با ترتیبِ ارشمیدسی دارد).

فرض کنید که $K \models \tilde{T}$ و $k \preceq K$ (یعنی k زیرساختاری مقدّماتی باشد از K) و $n \in \mathbb{N}$. یک تابعِ از K^n به K، یا یک زیرمجموعه از K^n، را k ـ *تعریف‌پذیر* [۲۹] می‌نامم، هرگاه با فرمولی در زبانِ $\tilde{T}$، احتمالاً با پارامترهائی در k، قابل تعریف باشد.

اکنون شرطِ زیر را روی $\tilde{T}$ در نظر بگیرید.

(اِس ۱) برای هر $K \models \tilde{T}$ و هر تابعِ K ـ تعریف‌شدنیِ $f : K \to K$، عدد طبیعی $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد، به طوری که برای همه‌ی x های به‌اندازه‌ی کافی بزرگ در K داریم $|f(x)| \leq x^n$.

قضیه ۴۲. فرض کنید $\tilde{T}$ شرطِ (اِس۱) را برآورد. بگذارید $K \models \tilde{T}$ و فرض کنید R زیرحلقه‌ای محدب باشد از K. بگذارید I ایده‌آلی (محدب) از R باشد، تولیدشده توسط عناصری که در R وارون‌پذیر نیستند (یعنی I ایده‌آلِ ماکزیمالِ یکتای R باشد). آنگاه زیرمدل مقدماتی $k. \preceq K$ وجود دارد، به طوری که $k. \subseteq R$ و برای هر $a \in R$، مجموعه‌ی $k. \cap (a + I)$ دقیقاً یک عضو دارد؛ یعنی، $k.$، حلقه‌ی R را می‌شکافد. [۳۰]

اثبات. مجموعه‌ی $\mathcal{S} = \{k : k \preceq K, k \subseteq R\}$ در شرایط لم زرن صدق می‌کند ($\mathcal{S}$ ناتهی است، ازآن‌جا که بستارِ اِسکولمِ $\{۰\}$ در K را شامل است). بگذارید $k.$ عنصری باشد ماکزیمال در $\mathcal{S}$. آنگاه $k. \preceq K$ (پس $k. \models \tilde{T}$)، $k. \subseteq R$ و ازآن‌جا که $k.$ میدان است، به‌روشنی $k. \cap (a + I)$ برای هر $a \in R$ بیشینه یک عضو دارد.

[۲۸] o-minimal

[۲۹] یا تعریف‌شدنی

[۳۰] split

ادّعا می‌کنم که برای هر $a \in R$ یک $\alpha \in k_0$ وجود دارد، به طوری که $a < \alpha$.
فرض کنید a مثالی نقض برای این ادعا باشد. از آنجا که $\tilde{T}$ توابع تعریف‌شدنی اسکولم می‌پذیرد، مجموعه‌ی $\{f(a) :$ تابعی k_0 ـ تعریف‌شدنی است $f : K \to K\}$ دامنه‌ی زیرساختاری است مقدماتی از K (شاملِ k_0) که بنا به ماکزیمال‌بودنِ k_0 دارای عنصری بزرگ‌تر از همه‌ی عناصرِ R است. فرض کنید $f(a)$ چنان عنصری باشد (که $f : K \to K$ تابعی است k ـ تعریف‌شدنی). بنا به (اِس ۱) عنصرِ $b \in k_0$ و عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ موجودند، به طوری که $k_0 \models \forall x > b(|f(x)| \le x^N)$. از آنجا که $k_0 \preceq K$ و $a > b$ (در K)، داریم $|f(a)| \le a^N$؛ ناقضِ این‌که R زیرحلقه‌ای است از K.

حال فرض کنید $a \in R$ و $k_0 \cap (a+I) = \emptyset$. کافی است (برای رسیدن به تناقض) که نشان دهیم که برای هر تابعِ k_0 ـ تعریف‌شدنیِ $f : K \to K$ داریم $f(a) \in R$. پس بگذارید f یک‌چنان تابعی باشد. بنا به نتیجه‌ای در [۱۰]، عناصرِ $a_1 < \dots < a_n$ از k_0 وجود دارند، به طوری (با گرفتنِ $a_0 = -\infty$ و $a_{n+1} = +\infty$) که f روی هر بازه‌ی (a_i, a_{i+1}) برای $i = 0, \dots, n$ (در k_0 و از این رو در K، به طور ضعیف) یکنوا است.[31] پس بنا به ادّعای بالا $b, c \in k_0$ موجودند، به طوری که $b < c < a$ و f روی بازه‌ی (b, c) به طور ضعیف یک‌نوا است. ازآن‌جا که $k_0 \cap (a+I) = \emptyset$، برای هر $\beta \in I$ داریم $c - a, b - b > \beta$، و از این رو، دو عنصر $(c-a)^{-1}$ و $(a-b)^{-1}$ در R واقعند. بنا به ادّعا، عنصر $d \in k_0$ وجود دارد، به طوری که $d > (c-a)^{-1}, (a-b)^{-1}$. در این صورت، اما $d^{-1} \in k_0$ و $b < b + d^{-1} < a < c - d^{-1} < c$. درنتیجه، $f(a)$ بینِ دو عنصرِ $f(b + d^{-1})$ و $f(c - d^{-1})$ از k_0 واقع است، و از این رو، همان‌گونه که می‌خواستیم، $f(a) \in R$. □

گیریم $K \models \tilde{T}$. برای هر زیرمجموعه‌ی A از K، با $\mathrm{cl}(A)$ بستارِ A را (در K) تحتِ توابع اسکولمِ $\tilde{T}$ نشان می‌دهیم. می‌گوئیم A، مدل K را **تولید می‌کند** هرگاه $\mathrm{cl}(A) = K$؛ و **مستقل است** هرگاه برای هر $a \in A$، داشته باشیم $a \notin \mathrm{cl}(A - \{a\})$. یک مجموعه‌ی مستقل را که K را تولید می‌کند، **پایه**‌ای برای K می‌نامیم. در [۱۰] نشان داده شده است که این مفهوم، دارای ویژگیِ **دادوستد**[32] است؛ از این رو، هر زیرمجموعه‌ی مستقل از K را می‌توان به پایه‌ای برای آن گُستراند، و همه‌ی پایه‌های K اندازه‌ی برابر دارند. اندازه‌ی یک‌چنان پایه از K را با **بُعد**(K) نشان می‌دهیم.

اگر $k \preceq K$، آنگاه گفته‌های بالا را می‌توان روی k، یعنی به مفهومِ بستار تحتِ توابع k ـ تعریف‌شدنی اعمال کرد. اندازه‌ی هر پایه از K روی k را با **بُعد**$_k(K)$ نشان داده‌ام. اگر $k_0 \preceq k_1 \preceq K$، آنگاه به‌شرطی که **بُعد**$_{k_0}(K)$ متناهی باشد، به‌آسانی می‌شود دید که

$$\textbf{بُعد}(K)_{k_0} = \textbf{بُعد}(k_1)_{k_0} + \textbf{بُعد}(K)_{k_1}.$$

حال، دریافتِ دیگری از بُعد را برای مدل‌های T معرفی می‌کنیم. در واقع، فرض کنید K یک میدان

[31] weakly monotone
[32] exchange property

حقیقی دلخواه باشد. به‌یاد آرید که عنصرِ a از K را *متناهی* می‌خوانند هرگاه $|a| < n$ برای یک $n \in \mathbb{N}$؛ و آن را *بی‌نهایت‌کوچک* [۳۳] می‌خوانند هرگاه $|a| < \frac{1}{n}$ برای همه‌ی $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. مجموعه‌ی $\mathrm{Fin}(K)$ از عناصرِ متناهیِ K عناصرِ بی‌نهایت‌کوچک در K زیرحلقه‌ای محدب از آن را، با ایده‌آلِ ماکزیمالِ یکتای $\mu(K)$، تشکیل می‌دهند. به علاوه مجموعه‌ی $\mathrm{Fin}(K) - \mu(K)$ زیرگروهی است ضربی از $K - \{0\}$، که من خارج‌قسمتِ اولی بر دومی را *گروه ارزیابی‌های* K [۳۴] خوانده آن را با $V(K)$ نشان می‌دهم. معمول است که $V(K)$ را به‌صورتِ یک گروهِ جمعی نوشته ترتیب زیر را در آن در نظر می‌گیرند.

$$a/\left(\mathrm{Fin}(M) - \mu(M)\right) > 0 \text{ اگر و تنها اگر } a \in \mu(K).$$

به علاوه، $V(K)$ گروهی است بخش‌پذیر (زیرا ریشه‌های m امِ عناصرِ مثبتِ K برای همه‌ی $m \in \mathbb{N}$ موجودند)؛ و ازاین‌رو $\mathbb{Q}$ ـ فضای برداریِ مرتب است. بُعدِ آن روی $\mathbb{Q}$ را با **بُعدِ ارزیابی**(K) نشان داده‌ام.

نگاشتِ $K - \{0\} \to V(K)$ را که نگاشتِ طبیعیِ $\nu_K : K \to V(K) \cup \{\infty\}$ را با تعریف $V_K(0) = \infty$ گسترش می‌دهد، *نگاشتِ ارزیابیِ* K می‌خوانند. به آسانی می‌توان تحقیق کرد، که (گرفته‌ایم $\alpha < \infty$ برای همه‌ی $\alpha \in V(K)$، و $\infty = \alpha + \infty = \infty + \alpha$ برای همه‌ی $\alpha \in V(K) \cup \{\infty\}$):

(v_1) برای هر $x, y \in K$، داریم $\nu_K(x.y) = \nu_k(x) + \nu_K(y)$.

(v_2) برای هر $x, y \in K$، داریم $\nu_K(x+y) \geq \min(\nu_K(x), \nu_K(y))$؛ و تساوی وقتی رخ می‌دهد که $\nu_K(x) \neq \nu_K(y)$.

(v_3) برای هر $x \in K$، داریم $\nu_K(x) \geq 0$ اگر و تنها اگر $x \in \mathrm{Fin}(K)$؛ و $\nu_K(x) > 0$ اگر و تنها اگر $x \in \mu(K)$.

هدفم اکنون نهادن شرطی بر $\tilde{T}$ است (علاوه بر (اِس۱))، که برای هر مدلِ K از آن که بعدِ متناهی دارد، تضمین کند، که

$$\textbf{بُعد}(K) \leq \textbf{بُعدِ ارزیابی}(K).$$

توجه کنید که این نامساوی وقتی که $\tilde{T}$ تئوریِ میدان‌های بسته‌ی حقیقی است (یعنی وقتی $\tilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}}$) برقرار است. در این حالت، **بُعد**(K) برابرِ درجه‌ی تعالیِ K (روی $\mathbb{Q}$) است و به‌آسانی می‌توان بررسی کرد، که اگر $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ و برای یک چندجمله‌ایِ نابدیهیِ p با ضرایبِ گویا داشته‌باشیم $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$، آن‌گاه عناصر $\nu_K(\alpha_1), \ldots, \nu_K(\alpha_n)$ روی Q مستقل خطیند.

شرطِ زیر را روی $\tilde{T}$ درنظر بگیرید.

[۳۳] infinitesimal

[۳۴] value group

(اِس۲) برای هر فرمولِ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ در زبانِ تئوری $\tilde{T}$، عناصرِ $m, p \in \mathbb{N}$ و $C^{\text{بی‌نهایت}}$ ـ توابع $F_i : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ (برای $i = 1, \ldots, p$)، تعریف‌شده بدون پارامتر در $\tilde{\mathbb{R}}$، موجودند، به طوری که

$$\tilde{\mathbb{R}} \models \forall \bar{x} \left(\phi(\bar{x}) \leftrightarrow \exists \bar{y} \left(\|\bar{y}\| \leq 1 \wedge \bigvee_{i=1}^{p} (N_i(\bar{y}) \wedge F_i(\bar{x}, \bar{y})) = 0 \right) \right)$$

که در آن $\bar{y} = y_1, \ldots, y_m$، $\|\bar{y}\| = \max\{|y_i| : i = 1, \ldots, m\}$، و $N_i(\bar{y})$ فرمولی است به صورت $\bigwedge_{i \in s_i} y_j \neq 0$، برای زیرمجموعه‌ای چون $s_i \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

تعریف ۴۳. اگر $\tilde{T}$ شرط‌های (اِس۱) و (اِس۲) را برآورد (و $\tilde{T}$ تئوریِ کاملِ یک کِشِشِ کمینه‌ی ترتیبیِ $\tilde{\mathbb{R}}$ از $\overline{\mathbb{R}}$ باشد)، آن را **هموار** می‌خوانند.

قضیه ۴۴. فرض کنید $\tilde{T}$ هموار باشد و $K \models \tilde{T}$. اگر **بُعد**(K) متناهی باشد، آنگاه **بُعدِ ارزیابی**$(K) \leq$ **بُعد**(K).

اثبات. اثبات با استقرا روی بعدِ K است. اگر K ارشمیدسی باشد (یعنی $\mu(K) = 0$) آنگاه **بُعد ارزیابی**$(K) = 0$ و نتیجه مشخص است. توجه کنید که وضعیتِ **بُعد**$(K) = 0$ نیز (با توجه به آن‌چه در آغازِ این بخش آمد) در این‌جا پوشش داده شده است، پس فرض کنید **بُعد**$(K) = n > 0$ و $\mu(K) \neq \{0\}$.

با بحثی مشابهِ آنچه در ادعّای مطرح شده در اثبات قضیه‌ی ۴۲ آمد، عنصر $a_\circ \in \mu(K)$، $a_\circ > 0$، موجود است، به طوری که برای هر $b \in K$ که $b > 0$ داریم $a_\circ^m < b$، به ازای یک عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$. بگذارید $R = \{b \in K : |b| < a_\circ^{-\frac{1}{m}}\}$. آنگاه R زیرحلقه‌ای محدب است از K و I، ایده‌آلِ ماکزیمال آن، ارشمیدسی است؛ بدین معنی که برای هر $a, b \in I$ عدد طبیعی $m \in \mathbb{N}$ موجود است، به طوری که $|b|^m < a$.

بنا به قضیه‌ی ۴۲ زیرمیدان $k \preceq K$ موجود است، که R را می‌شکافد. ازآنجا که $k \neq K$، داریم **بُعد**$(k) < n$. بگیرید **بُعد**$(k) = n - r$ (که $r \in \mathbb{N} - \{0\}$) و $c_1, \ldots, c_r \in K$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید، که $\{c_1, \ldots, c_r\}$ پایه‌ای باشد برای K روی k. می‌توان فرض کرد که $c_1, \ldots, c_r \in I$؛ زیرا اگر $c_i \notin R$، آنگاه می‌توان آن را با c_i^{-1}، و اگر $c_i \in R$ می‌توان (بنا به شکافته شدنِ k) آن را با عنصرِ یکتای $\mu \in I$ که $c_i + \mu \in k$ جایگزین کرد.

حال بگذارید k^* بستارِ جبریِ میدانِ $k(c_1, \ldots, c_r)$ در K باشد. آنگاه به‌روشنی $\nu_K[k^*]$ زیرفضائی از $V(K)$ است و با بحثی مشابهِ آنکه پیش از فرمول‌بندیِ (اِس۲) داشتیم، $\leq$ **بُعد**$_{\mathbb{Q}}\nu_K[k^*]$ **بُعد**$_{\mathbb{Q}}\nu_K[k] + r$ (که در آن **بُعد**$_{\mathbb{Q}}$ یعنی بُعدِ $\mathbb{Q}$ ـ فضای‌برداری). نیز، روشن است که $\nu_K[k] \cong V(K)$ (به‌عنوانِ $\mathbb{Q}$ ـ فضاهای برداری) پس **بُعدِ ارزیابی**$(k) + r \leq$ **بُعد**$_{\mathbb{Q}}\nu_K[k^*]$، که بنا به فرضِ استقرا

بُعد$(k)+r=n$ $\leq$ **بُعد**$_{\mathbb{Q}}\nu_K[k^*]$. پس کافی است نشان دهیم که ν_K به‌گونه‌ی پوشا $k^*-\{0\}$ را در $V(K)$ می‌نگارد.

گیریم $d\in K-\{0\}$. باید یک عنصر $\alpha\in k^*$ بیابیم، به طوری که $\nu_K(\alpha)=\nu_K(d)$. ازآن‌جا که برای هر $\beta\in K-\{0\}$ داریم $\nu_K(-\beta)=\nu_K(\beta)$ و $\nu_K(\beta^{-1})=-\nu_K(\beta)$، و برای هر $\beta\in R-I$ (از آن‌جاکه k حلقه‌ی R را می‌شکافد) داریم $\nu_K(\beta)\in\nu_K[k]$، می‌توانیم فرض کنیم که $d>0$ و $d\in I$. گیریم $f:K^r\to K$ تابعی باشد k ـ تعریف‌شدنی، به طوری که $f(c_1,\dots,c_r)=d$.

بنا به (اِس۲)، تابعِ k ـ تعریف‌شدنیِ $C^{\text{بی‌نهایت}}$ (از دیدِ K) به صورت $F:K^{r+1+m}\to K$ (برای عدد طبیعی $m\in\mathbb{N}$)، و زیرمجموعه‌ی $s\subseteq\{1,\dots,m\}$ به گونه‌ای موجودند، که

۳۳. برای هر $x\in K$ داریم $f(c_1,\dots,c_r)=x$ اگروتنهااگر عناصر $b_1,\dots,b_m\in K$، که در آن $b_i\neq 0$ برای $i\in s$، و $|b_i|\leq 1$ برای $i=1,\dots,m$، موجود باشند، به طوری که $F(c_1,\dots,c_r,x,b_1,\dots,b_m)=0$.

(از (اِس۲) بدین صورت استفاده کرده‌ام: پارامترهائی از k را که در فرمولِ تعریف‌کننده‌ی گرافِ f پدیدار شده‌اند با متغیرْ جایگزین کرده از آن یک فرمول، برای مثال $\phi(\overline{z},x_1,\dots,x_r,x)$، به دست آورده‌ام. آنگاه F را برابر با آن F_i گرفته‌ام که برای آن فرمولِ مربوط به (اِس۲)، وقتی‌که این پارامترها جایگزین $\overline{z}$ در $\phi(\overline{z})$ شوند و x_i برابرِ c_i (برای $i=1,\dots,r$) و x برابرِ d گرفته شود، در K برقرار باشد).

حال عناصر $\beta_1,\dots,\beta_n\in K$ را که در آن برای هر $i\in s$، داریم $\beta_i\neq 0$، و برای $i=1,\dots,m$، داریم $|\beta_i|\leq 1$ و نیز داریم $F(c_1,\dots,c_r,d,\beta_1,\dots,\beta_m)=0$ ثابت بگیرید. از آنجا که $\beta_1,\dots,\beta_m\in R$ (بنا به شکافته شدن k) می‌توانیم عناصرِ $\beta_1',\dots,\beta_m'\in k$ را (به‌طورِ یکتا) به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\beta_i-\beta_i'\in I$، برای $i=1,\dots,m$. بعلاوه بنا به ویژگیِ ارشمیدسیِ I می‌توانیم عدد طبیعی $N\in\mathbb{N}$ را آن‌قدر بزرگ بگیریم، که $|c_1|^N>|\beta_i|$ برای $i\in s$. (ازآن‌جا که c_1 در پایه‌ای از K روی k پدیدار می‌شود، نمی‌توان داشت $c_1=0$.)

گیریم

$$A=\{\langle x_1,\dots,x_m\rangle\in K^m : |c_1|^N\leq|x_i| \text{ و برای } i\in s\text{، } |x_i|\leq 1 \text{، } i=1,\dots,m \text{برای}\}$$

تابعِ زیر را درنظر بگیرید

$$h:K^{1+m}\to K:\langle x,x_1,\dots,x_m\rangle\mapsto|F(c_1,\dots,c_r,x,x_1,\dots,x_m)|.$$

ازآن‌جاکه (از دیدِ K) تابعِ h پیوسته است، باید در هرزیرمجموعه‌ی بسته‌ی کران‌دارِ K ـ تعریف‌شدنی از K^{1+m} به مینیمُم برسد. گیریم γ مینیمُمِ h روی $([0,1]-(\frac{d}{2},\frac{3d}{2}))$ باشد. بنا به مورد ۳۳ و ملاحظات پیشین، داریم $\gamma>0$ پس می‌توانیم $N'\in\mathbb{N}$ را آن‌قدر بزرگ بگیریم که $|c_1|^{N'}<\gamma$. آنگاه، روشن است که

۳۴. برای همه‌ی $\alpha \in [۰, ۱]$ و $\langle \beta'_۱, \ldots, \beta'_m \rangle \in A$ اگر

$$|F(c_۱, \ldots, c_r, \alpha, \beta'_۱, \ldots, \beta'_m)| \leq |c_۱|^{N'}$$

آن‌گاه $\frac{d}{۲} < \alpha < \frac{۳d}{۲}$ و از این رو، داریم $\nu_K(\alpha) = \nu_K(d)$.

حال فرض کنید $\lambda \in \mathbb{N}$ و بسطِ تیلورِ از درجه‌ی λ را برای تابعِ $F : K^{r+۱+m} \to K$ با فرمِ لاگرانژ برای باقیمانده، حولِ نقطه‌ی

$$\overline{\omega} = \langle \underbrace{۰, \ldots, ۰}_{r+۱}, \beta_۱^{۰}, \ldots, \beta_m^{۰} \rangle (\in k^{r+۱+m})$$

درنظر بگیرید. از این (چه با انتقال خصوصیاتِ قدیمی از $\tilde{\mathbb{R}}$ و چه با اثباتِ مستقیمِ قضیه‌ی تیلور در K) به یک چندجمله‌ایِ

$$\rho_\lambda(y_۱, \ldots, y_r, x, x_۱, \ldots, x_m)$$

می‌رسیم با ضرایبِ در k و یک عنصرِ $\beta_\lambda \in k$ ($\beta_\lambda > ۰$)، به طوری که

۳۵. برای همه‌ی $t \in K$ به طوری که $۰ < t < ۱$، و همه‌ی $\overline{z} \in K^{r+۱+m}$ به طوری که $\|\overline{z} - \overline{w}\| < t$، داریم

$$|F(\overline{z}) - \rho_\lambda(\overline{z})| < B_\lambda . t^{\lambda+۱}.$$

بگیرید $t_۰ = ۲ . \max(|c_۱|, \ldots, |c_r|, d, |\beta_۱ - \beta_۱^{۰}|, \ldots, |\beta_m - \beta_m^{۰}|)$. آن‌گاه $t_۰ \in I$، $t_۰ > ۰$، و

$$t_۰^{\lambda_۰+۱} < (۲B_{\lambda_۰})^{-۱} . |c_۱|^{N'}. \qquad (۳۶)$$

حال با گرفتنِ $\lambda = \lambda_۰$، $t = t_۰$ و $\overline{z} = \langle c_۱, \ldots, c_r, \beta_۱, \ldots, \beta_m \rangle$ در ۳۵ و سپس استفاده از ۳۶ داریم

$$|\rho(c_۱, \ldots, c_r, d, \beta_۱, \ldots, \beta_m)| < \frac{۱}{۲} . |c_۱|^{N'} \qquad (۳۷)$$

، که در آن $\rho = \rho_{\lambda_۰}$،

هم‌چنین به‌روشنی داریم

$$\langle d, \beta_۱, \ldots, \beta_m \rangle \in [۰, ۱] \times A \qquad (۳۸)$$

و

$$\|\langle c_۱, \ldots, c_r, d, \beta_۱, \ldots, \beta_m \rangle - \overline{\omega}\| < ((۲B_{\lambda_۰})^{-۱} . |c_۱|^{N'})^{(\lambda_۰+۱)^{-۱}} \qquad (۳۹)$$

موارد ۳۷، ۳۸ و ۳۹ را می‌توان در زبانِ حلقه‌های ترتیبی نوشت، و آن‌ها را می‌توان به‌عنوان شرایطی با پارامتر در k^* (بستارِ جبریِ میدانِ $k(c_1, \ldots, c_r)$ در K) روی نقطه‌ی $\langle d, \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle$ نگریست. از آنجا که k^* در زبانِ حلقه‌های ترتیبی، زیرساختاری است مقدماتی از K (زیرا هر دو میدان‌های بسته‌ی حقیقیند)، نتیجه می‌گیریم، که عناصرِ $\alpha, \beta'_1, \beta'_m \in k^*$ موجودند، به طوری که

$$|\rho(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta'_1, \ldots, \beta'_m)| < \frac{1}{2}.|c_1|^{N'}, \tag{۴۰}$$

$$\langle \alpha, \beta'_1, \ldots, \beta'_m \rangle \in [0, 1] \times A, \tag{۴۱}$$

و

$$\|\langle c_1, \ldots, c_1, \alpha, \beta'_1, \ldots, \beta'_m - \overline{\omega} \rangle\| < ((2B_{\lambda.})^{-1}.|c_1|^{N'})^{(\lambda.+1)^{-1}}. \tag{۴۲}$$

حال بنا به ۴۲، می‌توان ۳۵ را با $\lambda = \lambda.$، $t = ((2B_{\lambda.})^{-1}.|c_1^{N'}|(\lambda. + 1)^{-1}$ و $\overline{z} = \langle c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta'_1, \beta'_m \rangle$ به‌کار گرفت که با کمکِ ۴۰ بدهد

$$|F(c_1, \ldots, c_r, \alpha, \beta'_1, \ldots, \beta'_m)| < |c_1|^{N'}. \tag{۴۳}$$

نتیجه‌ی مطلوب، اکنون از ۴۳، ۴۱ و ۳۴ حاصل می‌شود. $\square$

فرض کنید $K \models \tilde{T}$ و $k \preceq K$. آنگاه $\nu_K[k - \{0\}]$ یک $\mathbb{Q}$ ـ زیرفضای برداری از $V(K)$ است (زیرا k زیرمیدانی بسته‌ی حقیقی است از K)، و بُعدِ $V(K)$ را روی $\nu_K[k - \{0\}]$ با $(K)_k$**بُعدِ ارزیابی** نشان می‌دهم.

در زیر، تعمیمی را از گزاره‌ی ۱۳ ارائه کرده‌ام، که در این بخش مورد نیاز است.

قضیه ۴۵. گیریم، که $\tilde{T}$ هموار باشد، $K \models \tilde{T}$، $k \preceq K$ و فرض کنیم $(K)_k$**بُعد** متناهی باشد. آنگاه $(K)_k$**بُعدِ ارزیابی** $\leq (K)_k$**بُعد**.

اثبات. روشن است که تنها کافی است حالتی را در نظر بگیریم که $1 = (K)_k$**بُعد**. پس فرض کنید a یک مولّد برای K روی k باشد. فرض کنید، برای رسیدن به تناقض، که $2 \leq (K)$**بُعدِ ارزیابی**. آنگاه توابع k ـ تعریف‌شدنیِ $f, g : K \to K$ موجودند، به طوری که $\nu_K(f(a))$ و $\nu_K(g(a))$ روی $\nu_K[k - \{0\}]$، $\mathbb{Q}$ مستقل خطیند.

ساختارِ $\langle K, P \rangle$ را در نظر بگیرید، که در آن P یک رابطه‌ی یکانی روی K است که تعبیرش (دامنه‌ی) k است. فرض کنید $\langle {}^*K, {}^*P \rangle$ گسترشی الف‌صفراشباع از $\langle K, P \rangle$ باشد. بگذارید k^* زیرساختاری مقدّماتی باشد از K^*، با جهانِ P^*. بی‌گمان k^* الف‌صفراشباع است. ادّعا می‌کنم که $\nu_{*k}(f(a))$ و

$\nu_{*k}(g(a))$ روی $[{}^*k - \{۰\}]$ ν_{*k} مستقل خطیند. در غیر این صورت، برای $p, q \in \mathbb{Q}$ نه‌هردو صفر، و عنصری چون $b \in^* k - \{۰\}$ داریم $p\nu_{*k}(f(a)) + q\nu_{*_k}(g(a)) + \nu_{*_k}(b) = ۰$. درنتیجه، $i^{-۱} < |f(a)|^p.|g(a)|^q.|b| < i$، برای عدد طبیعی $i \in \mathbb{N} - \{۰\}$. از آنجا که $a \in K$ و $\langle K, P\rangle \preceq \langle {}^*K, {}^*P\rangle$، نتیجه می‌گیریم، که $b' \in k - \{۰\}$ موجود است، به طوری که

$$i^{-۱} < |f(a)|^p.|g(a)|^q.|b'| < i،$$

که این، $\mathbb{Q}$ ـ مستقل بودن خطیِ $\nu_K(f(a))$ و $\nu_K(g(a))$ را روی $\nu_K[k - \{۰\}]$، نقض می‌کند.

بنا به بحث بالا، می‌توان (با گرفتنِ $k = {}^* k$ و K= زیرساختارِ مقدماتیِ ${}^*K$ که با a روی ${}^*k$ تولید شده باشد) فرض کرد که k الف‌صفراشباع است.

حال، فرض کنید $k.$ زیرساختاری مقدماتی باشد از k، به طوری که **بُعد**$(k.)$ متناهی است و f, g هردو $k.$ ـ تعریف‌شدنیند. مجموعه‌ی زیر از فرمول‌های روی k را درنظر بگیرید.

$$\Theta(x) : \{ \quad |f(x)|.|g(x)|^q.|b| \le i^{-۱} \quad \vee \quad |f(x)|^p.|g(x)|^q.|b| \ge i \quad :$$
$$i \in \mathbb{N}, \text{ نه‌هردوصفر } p, q \in \mathbb{Q}, b \in k. - \{۰\}\}$$

روشن است که $\Theta(x)$ در K توسط a برآورده می‌شود، و از این رو $\Theta(x)$ در k متناهیاً برآورده‌شدنی است. به علاوه، از آنجا که **بُعد**$(k.)$ متناهی است، می‌توان $\Theta(x)$ را به‌گونه‌ای بازنوشت که دربرگیرنده‌ی تنها متناهی‌تعداد پارامتر از $k.$ (یعنی، عناصرِ پایه) و، در نتیجه، از k باشد. پس $\Theta(x)$ در k توسط عنصری چون $a_۱$ برآورده می‌شود. بگذارید $k_۱$ زیرساختارِ مقدماتیِ k، تولیدشده روی $k.$ توسط $a_۱$ باشد. روشن است که (از آنجا که بنابه تعریفِ $\Theta(x)$، داریم $\nu_{k_۱}(f(a_۱))$ و $\nu_{k_۱}(g(a_۱))$ روی $\nu_{k_۱}[k. - \{۰\}]$ عناصری $\mathbb{Q}$ ـ مستقل خطیند)،

$$\text{بُعد}(k_۱) = \text{بُعد}(k.) + ۱$$

و

$$\text{بُعدِ ارزیابی}(k_۱) \ge \text{بُعدِ ارزیابی}(k.) + ۲.$$

این بحث را می‌توان برای $k_۱$ به‌جای $k.$ تکرار کرده آنقدر ادامه داد تا برای هر $l \in \mathbb{N}$، رسید به زیرساختاری مقدماتی، به عنوان مثال k_l، از k، به طوری که

$$\text{بُعد}(k_l) = \text{بُعد}(k.) + l$$

و

$$\text{بُعدِ ارزیابی}(k_l) \ge (\text{بُعدِ ارزیابی}(k.) + ۲l.$$

اما، این قضیه‌ی ۴۵ را، وقتی که $l = \text{بُعد}(k.) + ۱$، نقض می‌کند. □

پیش از اِعمالِ قضیه‌ی ۴۵ به وضعیّتِ بخشِ ۹ به نتیجه‌ی زیر برای $\mathbb{Q}$ ـ فضاهای‌برداریِ‌ترتیبی نیازمندیم.

لم ۴۶. فرض کنید V یک $\mathbb{Q}$ ـ فضای برداریِ مرتب، و U زیرفضائی از آن باشند، به طوری که بعد V روی U برابر با n است ($n \in \mathbb{N}$). آن‌گاه پایه‌ی $\cdot < v_1, \dots, v_n$ برای V روی U موجود است، به طوری که هرگاه v عنصری در V باشد، به طوری که $v > u$ برای همه‌ی $u \in U$، و داشته باشیم $v = (\sum_{i=1}^{n} q_i v_i + u_\cdot)$ (که در آن $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}, u_\cdot \in U$)، آن‌گاه داریم $|v| > q.v_j$ برای یک $q \in \mathbb{Q}$ و $j = \max\{i : q_i \neq \cdot\}$.

اثبات. فرض کنید $\overline{U}$ بستارِ محدّبِ U در V باشد. اگر $\overline{U} = V$ نتیجه بدیهی است. اگرنه، $l \in \mathbb{N}$، به طوری که $1 \leq l \leq n$، و $\mathbb{Q}$ ـ فضاهای برداریِ ارشمیدسیِ $A_1, \dots, A_l$ موجودند، به طوری که V (به عنوان $\mathbb{Q}$ ـ فضای برداری) یکریخت (=ایزومُرف) است با $U \times A_1, \dots, A_l$، با ترتیبِ عکسِ قاموسی. □

۱۱ کران‌بستنِ پاسخهای معادلات چندجمله‌ایْ‌نمائی و به پایان رساندن اثباتِ دومین قضیه‌ی اصلی

از بخشِ ۹ به‌یاد آرید که $T_{\exp}$ و $L_{\exp}$ به‌ترتیب تئوری و زبانِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, \exp \rangle$ را نشان می‌دهند. نیز، با L_e و T_e به‌ترتیب زبان و تئوریِ ساختارِ $\langle \overline{\mathbb{R}}, e \rangle$ را نشان داده‌ام، که در آن

$$e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp((1 + x^2)^{-1}).$$

قضیه ۴۷. تئوری T_e هموار، و مدل‌کامل است.

اثبات. مدل‌کامل بودنِ T_e از نخستین قضیه‌ی اصلی نتیجه می‌شود (مثالِ الفِ بخشِ ۱ را ببینید). ترتیب‌کمینگی و شرطِ (اِس۱) نیز بنا به نتایجِ [۱۳] برقرارند (نتیجه‌ی ۱۴ را نیز ببینید). برای بررسی برقرای (اِس۲)، تابعِ زیر را در نظر بگیرید

$$e^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x^2.(1 + x^2)^{-1})$$

و توجه کنید که برای هر $x \in \mathbb{R} - \{\cdot\}$ داریم $e(x^{-1}) = e^*(x)$. درنتیجه، e^* در $\langle \mathbb{R}, e \rangle$ بدون پارامتر تعریف‌شدنی است. نیز e و e^* در سرتاسر $\mathbb{R}$ توابعی $C^{\text{بی‌نهایت}}$ هستند. گیریم $\phi(x_1, \dots, x_n)$ فرمولی باشد در L_e. از مدل‌کاملیِ T_e نتیجه می‌شود، که چندجمله‌ایِ

$\rho \in \mathbb{Z}[z_۱, \dots, z_{۲m+۲n}]$ (برای یک $m \in \mathbb{N}$) موجود است، به طوری که

$$\langle \overline{\mathbb{R}}, e\rangle \models \forall x_۱, \dots, x_n(\phi(x_۱, \dots, x_n) \leftrightarrow \exists y_۱, \dots, y_m \rho(y_۱, \dots, y_m, e(y_۱) \dots, e(y_m), x_۱, \dots, x_n, e(x_۱), \dots, e(x_n)) = ۰). \quad (*)$$

حال (اِس۲)، با جایگزین کردن y_j با $y_j^{-۱}$ برای هر $s \subseteq \{۱, \dots, n\}$ (برای هر $j \in s$) در تابعِ آمده در سمتِ راستِ فرمول (*)، و سپس ضرب حاصل آن در توانی به قدر کافی بزرگ از $\prod_{j\in s} y_j$، و به دست آوردن تابعی $C^{\text{بی‌نهایت}}$ (روی $\mathbb{R}$)، به عنوان مثال F_s، نتیجه می‌شود. پس در نمادگذاری (اِس۲) p برابر است با ۲^m، $N_i(\overline{y})$ برابر است با $\bigwedge_{j\in s_i} y_j \neq ۰$ و F_i برابر است با F_{s_i}، که در آن $\{s_i : i < ۲^m\}$ شمارشی است از $\{۱, \dots, m\}$. □

فرض کنید که k و K مدل‌هائی از $T_{\exp}$ باشند، به طوری که $k \subseteq K$. روشن است که k و K هم‌چنین مدلهایی از T_e را، سوار بر همان میدان ترتیبی، مشخص می‌کنند. این مدل‌ها (ی محدودشده) را به‌ترتیب با $\tilde{k}$ و $\tilde{K}$ نشان می‌دهم. معلوم است که $\tilde{k} \subseteq \tilde{K}$، پس بنا به مدل‌کاملیِ T_e (قضیه ۴۷)، داریم $\tilde{k} \preceq \tilde{K}$.

حال فرض کنید k^* مدلی از T_e باشد، به طوری که $k' \subseteq k^* \subseteq K'$. آنگاه برای هر $a \in k^*$، عنصر $\exp(a)$ عنصری در دامنه‌ی K است، که ممکن است در k^* واقع باشد، یا نباشد. بگیرید

$$E(k^*) = \{a \in k^* : \exp(a) \in k^*\}.$$

روشن است که $E(k^*)$ یک $\mathbb{Q}$ ـ زیرفضای برداری از گروهِ جمعیِ k^* است (زیرا k^* یک میدان ترتیبیِ بسته‌ی حقیقی است و از این رو، تحتِ گرفتنِ توان‌های گویای عناصرِ مثبت بسته است) و گروهِ جمعیِ k را به عنوان زیرفضا دربردارد. هم‌چنین $\mathrm{Fin}(k^*)$ زیرفضای دیگری از آن است، زیرا اگر $a \in \mathrm{Fin}(k^*)$، آنگاه عدد صحیح $m \in \mathbb{Z}$ و عنصر $b \in k^*$ موجودند، به طوری که $a = \frac{m}{۱+b^۲}$، و آنگاه $\exp(a) = e(b)^m$ و $e(b)^m \in k^*$.

لم ۴۸. در وضعیت شرح داده شده در بالا، $n = $ **بُعد**$_{k'}(k^*)$ (به عنوان مدلهای تئوری T_e) که در آن $n \in \mathbb{N}$. هم‌چنین فرض کنید $E(k^*)$ روی زیرفضایِ $k + \mathrm{Fin}(k^*)$ ازخود، دارای بُعدی کمینه برابر با n باشد. آنگاه برای هر $a \in E(k^*)$ عنصر $b \in k$ موجود است، به طوری که $|a| < b$.

اثبات. فرض کنید این‌گونه نباشد. بگذارید $U = k + \mathrm{Fin}(K^*)$ و زیرفضای V از $E(k^*)$ را به‌گونه‌ای بگیرید که $U \subseteq V$، V روی U دقیقاً n بُعدی باشد، و V دارای عنصری چون α باشد، به طوری که $\alpha > b$ برای هر $b \in k$. در نتیجه روشن است، که $\alpha > b$ برای هر $b \in U$.

بگذارید $0 < v_1 < \ldots < v_n$ پایه‌ای باشد برای V روی U آنگونه که در لم ۴۶ شرح داده شد. بگذارید j کمینه عددی باشد، به طوری که $v_j > b$ برای همه‌ی $b \in U$.

عناصرِ $\nu_K(\exp(v_1)), \ldots, \nu_K(\exp(v_n))$ را از گروهِ ارزیابی $V(K)$ برای K درنظر بگیرید. ادّعا می‌کنم که این‌ها روی $\nu_K[k - \{0\}]$ مستقل خطیند. در غیر این صورت (با کمکِ (v_1) تا (v_3) در بخشِ ۱۰)، عناصر $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$، نه‌همه‌صفر، و $c \in k - \{0\}$ موجودند، به طوری که $c \exp(\sum_{i=1}^{n} q_i v_i) \in \operatorname{Fin}(K) - \mu(K)$. روشن است که می‌توان فرض کرد که $c > 0$ و از این رو (از آنجا که $k \models T_{\exp}$) داریم $c = \exp(d)$، برای یک عنصر $d \in k$. بنابراین $\exp(d + \sum_{i=1}^{n} q_i v_i) \in \operatorname{Fin}(K) - \mu(K)$، که، و از ویژگیهای معمول تابع نمایی نتیجه می‌شود، که $d + \sum_{i=1}^{n} q_i v_i \in \operatorname{Fin}(K)$؛ پس $d + \sum_{i=1}^{n} q_i v_i \in \operatorname{Fin}(k^*)$. اما، این استقلال خطی $v_1, \ldots, v_n$ را روی U نقض می‌کند.

حال، از قضایای ۴۵ و ۴۲ با گرفتن این فرض که $n = (k^*)$**بُعد**$_{k'}$، نتیجه می‌شود، که $n \leq (k^*)$**بُعدِ ارزیابی**$_{k'}$؛ و از این رو، $\nu_K(\exp(v_1)), \ldots, \nu_K(\exp(\nu_n))$ فضای $\nu_K[k^* - \{0\}]$ را روی $\nu_K[k - \{0\}]$ تولید می‌کند (توجه کنید که $\exp(v_1), \ldots, \exp(v_n) \in k^*$). به‌ویژه داریم

$$\nu_K(v_j) = \nu_K(c) + \sum_{i=1}^{n} p_i \nu_K(\exp(v_i))$$

برای یک $c \in k - 0$ و $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{Q}$. دوباره فرض می‌کنیم $c = \exp(d)$، برای یک $d \in k$ و بنابراین $\nu_K(v_j) = \nu_K(\exp(d + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i))$. بنا به (v_3) در بخشِ ۱۰، از این نتیجه می‌گیریم، که $\frac{v_j}{N} < \exp(d + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i) < N v_j$، برای عددی طبیعی چون $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. از سمت راست نامساوی بالا، از نتیجه می‌شود، که $d + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i > 0$ (از آن‌جا که $\frac{v_j}{N} > 1$). به‌علاوه اگر می‌داشتیم $p_j = p_{j+1} = \ldots = p_n = 0$، آن‌گاه $0 < d + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i < b$، برای یک $b \in k$ و از این رو، $\frac{v_j}{N} < \exp(b)$ که این انتخابِ v_j را نقض می‌کرد، زیرا $N. \exp(b) \in k$. پس برای یک $i = j, \ldots, n$ داریم $p_i \neq 0$، و از این رو بنا به انتخابِ $v_i, \ldots, v_n$ عدد گویای $q \in \mathbb{Q}$ به گونه‌ای موجود است، که $q > 0$ و $d + \sum_{i=1}^{n} p_i v_i > q v_j$ (لمِ ۴۶ را ببینید). امّا بنا به سمتِ راستِ نامساویِ بالا، از این نتیجه می‌شود، که $N v_j > \exp(q v_j)$. این نتیجه، نامعقول است؛ زیرا $v_j > r$ برای همه‌ی $r \in \mathbb{N}$. $\square$

اکنون اثباتِ قضیه‌ی اصلی را به فرجام می‌رسانم. به‌یاد آرید از بخشِ ۲، که باید وضعیتِ زیر را در نظر می‌گرفتیم:

داریم $n, m \in \mathbb{N}$ به طوری که $n \geq m > 0$، $\overline{\alpha} = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle \in K^n$، $l \in \{1, \ldots, n\}$، $s \subseteq \{1, \ldots, n\}$ به طوری که $|s| = m$، و $l \in s$، و توابع $f_1, \ldots, f_n \in M_n^s$ را (نگا تعریفِ ۱) به طوری که $f_1(\overline{\alpha}) = \ldots = f_n(\overline{\alpha}) = 0$ و $J(f_1, \ldots, f_n)(\overline{\alpha}) \neq 0$. نیز $|\alpha_l| > b$ برای هر $b \in k$.

برای اثبات ۴۱ کافی است نشان دهیم، که $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ روی زیرفضای $k + \mathrm{Fin}(K)$ از ($\mathbb{Q}$ ـ فضای برداریِ K)، $\mathbb{Q}$ مستقل خطیند.

برای این‌کار، زیرساختارِ، به عنوان مثال k^*، را از K' تولیدشده روی k' توسط $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n\} \cup \{\exp(\alpha_i) : i \in s\}$ با توابع اسکولم در T_e، درنظر بگیرید. داریم $k^* \models T_e$، و $k' \subseteq k^* \subseteq K'$. پیداست که $n + m \geq$ $(k^*)_{k'}$**بُعد**. ادّعا می‌کنم که درواقع داریم $m \geq$ $(k^*)_{k'}$**بُعد**. با درست در نظر گرفتنِ این ادّعا، از لم ۴۸ نتیجه می‌شود، که $E(k^*)$ بُعدِ، بیشینه برابر با، $m - 1$ روی $k + \mathrm{Fin}(k^*)$ دارد (زیرا $\alpha_l \in E(k^*)$). اما، $\{\alpha_i : i \in s\} \subseteq E(k^*)$ که بنا بر آن $\{\alpha_i : i \in s\}$ مجموعه‌ای است $\mathbb{Q}$ ـ وابسته‌ی خطی روی $k + \mathrm{Fin}(k^*)$ است. نیز، به طریق اولی، $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ روی $k + \mathrm{Fin}(K)$ دنباله‌ای $\mathbb{Q}$ ـ وابسته‌ی خطّی است. برای سادگی، در اثبات ادعا می‌گیریم $s = \{1, \ldots, m\}$. نیز گیریم $\alpha_{n+i} = \exp(\alpha_i)$ برای $i = 1, \ldots, m$.

برای هر $1 \leq i \leq n$ تابع $g_i \in M_n^{\emptyset}[x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$ را به گونه‌ای انتخاب کنید، که $g_i(x_1, \ldots, x_n, \exp(x_1), \ldots, \exp(x_m)) \equiv f_i(x_1, \ldots, x_m)$ و بگیرید $g_{n+i}(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \exp(x_i) - x_{n+i}$، برای $1 \leq i \leq m$. آن‌گاه روشن است که $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \rangle$ پاسخی است برای سامانه‌ی $g_i(x_1, \ldots, x_{n+m}) = 0$ ($1 \leq i \leq n + m$). هم‌چنین با کمکِ قاعده‌ی زنجیری، جبرِ مقدماتیِ ماتریسی و این نکته که $J(f_1, \ldots, f_n)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0$، به‌آسانی می‌توان نشان داد که $J(g_1, \ldots, g_{n+m})(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}) \neq 0$.

در نتیجه، بردارهای ردیفِ $\langle \frac{\partial g_1}{\partial x_i} : 1 \leq i \leq n + m \rangle, \ldots, \langle \frac{\partial g_n}{\partial x_i} : 1 \leq i \leq n + m \rangle$ ارزیابی‌شده در $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \rangle$ روی K مستقل خطیند، و بنابراین زیرمجموعه‌ی $u \subseteq \{1, \ldots, n + m\}$ با اندازه‌ی n موجود است، به طوری که ماتریسِ

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \in u}}$$

ارزیابی‌شده در $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m} \rangle$، ناتکین است. حال توجه کنید که $g_1, \ldots, g_n$ توابعیند k' ـ تعریف‌شدنی‌ا (یعنی L_e ـ تعریف‌شدنی با پارامتر در k) بنا به قسمت سومِ گزاره‌ی ۴۰ (با گرفتنِ $s = \emptyset$) نتیجه می‌شود، که برای هر $j \in u$، عنصرِ α_j، عنصری است k^* ـ تعریف‌شدنی در $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n + m, i \notin u\}$. پس زیرمدلِ K' که روی k' با $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq n + m, i \notin u\}$ تولید شده است، $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}$ را شامل، و ازاین‌رو برابر با k^* است. پس همان‌گونه که می‌خواستیم $m \geq$ $(k^*)_{k'}$**بُعد**.

References

[1] J. Bridge. *Beginning Model Theory: The Completeness Theorem and Some Consequences*. Oxford Logic Guides. Clarendon Press, 1977.

[2] Bernd I. Dahn. The limit behaviour of exponential terms. *Fund. Math.*, 124(2):169–186, 1984.

[3] J. Denef and L. van den Dries. p-adic and real subanalytic sets. *Ann. of Math. (2)*, 128(1):79–138, 1988.

[4] J. Dieudonne. *Foundations of Modern Analysis*. Pure and Applied Mathematics. Read Books, 1969.

[5] A. M. Gabrièlov. Projections of semianalytic sets. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 2(4):18–30, 1968.

[6] Askol'd G Khovanskii. On a class of systems of transcendental equations. In *Soviet Math. Dokl*, volume 22, pages 762–765, 1980.

[7] Julia F. Knight, Anand Pillay, and Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(2):593–605, 1986.

[8] Stanis law LOJASIEWICZ. Ensembles semi-analytiques. 1965.

[9] L. Mirsky. *An Introduction to Linear Algebra*. Dover Books on Mathematics Series. Dover, 1990.

[10] Anand Pillay and Charles Steinhorn. Definable sets in ordered structures. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 295(2):565–592, 1986.

[11] Alfred Tarski. *A decision method for elementary algebra and geometry*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951. 2nd ed.

[12] L. Van den Dries. *Tame Topology and O-minimal Structures*. 150 184. Cambridge University Press, 1998.

[13] Lou van den Dries. A generalization of the Tarski-Seidenberg theorem, and some nondefinability results. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 15(2):189–193, 1986.

[14] AJ Wilkie. On the theory of the real exponential field. *Illinois Journal of Mathematics*, 33(3):384–408, 1989.

[15] Helmut Wolter. On the model theory of exponential fields (survey). *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 120:343–353, 1986.