VORLESUNGSREIHE

Der Minimalflächenbeweis des Positive Energy Theorem

Ernst Christoph Kuwert

no. 14

Diese Arbeit ist mit Unterstützung des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft getragenen Sonderforschungsbereiches 256 an der Universität Bonn entstanden und als Manuskript vervielfältigt worden.

Bonn, Mai 1990

On the Minimal Hypersurface Proof of the Positive Energy Theorem

Ernst Christoph Kuwert

Abstract:

In 1979 R. Schoen and S.T. Yau succeeded in proving the famous positive mass conjecture. We describe their argumentation in detail, including the construction of the stable imbedded minimal surface which is crucial in the proof. The invented methods can also be applied to exterior Plateau problems and hence are of independent interest.

AMS Classification Code: 49 F 22 (primary); 49 F 10, 83 F 05 (secondary)

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	2- 8
Notationsvereinbarungen	9
1. Einige geometrische Formeln	10- 28
2. Gewichtete Räume auf asymptotisch flachen Mannigfaltigkeiten	29- 42
3. Die Energie einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit	43- 54
4. Beweis des Positive Energy Theorem	55-105
4.1 Konstruktion minimierender Hyperflächen in M	58- 71
4.2 Regularität der Plateaulösungen Σ_σ	71- 77
4.3 Regularität der Grenzfläche Σ	77- 84
4.4 Stabilität von Σ	84- 93
4.5 Herbeiführung des Widerspruchs	94-102
4.6 Beweis der Eindeutigkeitsaussage	102-105
Zusammenfassung	106-107
Literaturverzeichnis	108-110

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist eine ausführliche Darstellung des Beweises des *Positive Energy Theorem*, wie er von Schoen und Yau 1979 in Dimension drei [SY1] sowie 1981/1989 in den Dimensionen vier bis sieben [SY4], [SR2] gegeben wurde.

Gegenstand der Untersuchung ist eine nichtkompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^n,g) mit $n = \dim M \geq 3$, die eine besondere Struktur besitzt: (M,g) heißt *asymptotisch flach*, wenn das Komplement M_∞ eines Kompaktums $K \subset M$ diffeomorph auf das Außengebiet einer Kugel im $\mathbb{R}^n$ bezogen werden kann und in den dadurch definierten Koordinaten $x = (x^1,\ldots,x^n)$ die Metrik g gegen die euklidische Metrik δ mit einer Rate $\tau > 0$ abfällt:

$$|\partial^i(g-\delta)| = \mathcal{O}(|x|^{-\tau-i}) \quad \text{für} \quad i \in \{0,1,2,\}\ .$$

Ist $\tau > \frac{n-2}{2}$ und ferner die Skalarkrümmung der Metrik g über M integrierbar, so können wir dem Paar (M,g) eine Zahl zuordnen, die wir als die *Energie von* (M,g) bezeichnen [ADM]:

$$E(g) = \frac{1}{\chi^{n-1}(S^{n-1})} \lim_{R\to\infty} \int_{\{|x|=R\}} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\, N_j \, d\chi^{n-1}\ .$$

Dabei ist $N(x) = \frac{x}{|x|}$ gesetzt. Wie Bartnik 1986 zeigte [BR; 4.2], hängt die Energie nicht von der Auswahl des asymptotischen Koordinatensystems ab und ist in diesem wohlverstandenen Sinne eine Riemannsche Invariante.

Das von uns zu beweisende Resultat lautet nun so:

Satz (*Positive Energy Theorem*)

Sei (M,g) wie oben beschrieben. Die Skalarkrümmung von g sei nichtnegativ. Dann gilt:

(1) $E(g)$ ist nichtnegativ.

(2) Falls $E(g)$ verschwindet, so ist (M,g) isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Die Fragestellung des Satzes tritt in natürlicher Weise sowohl in der theoretischen Physik als auch in der Differentialgeometrie auf:

a) Sei (N^4,g) eine vierdimensionale Raumzeit, g also eine Metrik der Signatur $(-+++)$. Der Einfluß der Physik auf die Geometrie von (N,g) wird bestimmt durch ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, den sogenannten *Einsteinschen Feldgleichungen*:

$$\mathrm{Ric}_g - \frac{1}{2} S_g \, g = 8\pi\gamma T \quad .$$

Dabei beschreibt der Energie-Impulstensor T die Verteilung der Materie, und γ ist eine physikalische Konstante. Aus physikalischen Gründen ist T zusätzlichen Bedingungen, der sogenannten *dominant energy condition*, unterworfen [HE, § 4.3], [GR, S. 408]. Im Gegensatz zu anderen Feldtheorien kann der Raumzeit (N,g) *keine* lokal definierte Energiedichte zugeordnet werden. Unter der Annahme der Existenz zusätzlicher Daten kann aber nach Arnowitt, Deser und Misner [ADM] die Gesamtenergie des Systems (N,g) - die sogenannte *ADM-Masse* - definiert werden. Man nimmt dazu an, daß (N,g) ein isoliertes physikalisches System repräsentiert. Unter dieser Voraussetzung ist die Existenz einer raumartigen, asymptotisch flachen Hyperfläche $M^3 \subset N$ plausibel. Die ADM-Masse von (N,g) wird dann definiert als die Energie von $(M, g|_M)$. Ist M *maximal*, verschwindet also die mittlere Krümmung der Einbettung $M \subset N$, so ergibt sich aus der dominant energy condition, daß die Skalarkrümmung von $g|_M$ nichtnegativ ist [KJ, S. 321]. In diesem Fall ist die

Positivität der ADM-Masse also eine Konsequenz obigen Satezs. In ihrer Arbeit [SY3] haben Schoen und Yau 1981 gezeigt, daß die Frage nach der Positivität der ADM-Masse - die *Positive Mass Conjecture* - stets auf den Fall der Existenz einer maximalen "Anfangswertfläche" $M \subset N$ reduziert werden kann. Die Bestätigung der Positive Mass Conjecture bedeutet also die *Stabilität des flachen Minkowskiraums* in der allgemeinen Relativitätstheorie.

b) In der *Quantentheorie der Gravitation* nach Hawking [GHP] werden die asymptotisch flachen (Riemannschen) Metriken auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M in konforme Äquivalenzklassen eingeteilt. In jeder dieser Klassen befindet sich ein Vertreter, dessen Skalarkrümmung identisch verschwindet. Die Positivität der Energie dieses Vertreters spielt eine wichtige Rolle für die Definierbarkeit des Pfadintegrals in der Quantentheorie der Gravitation und wird von den Autoren obigen Artikels [GHP; S. 144] als *Positive Action Conjecture* formuliert.

c) Sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M \geq 3$. Um in der Konformklasse $C(g)$ von g einen Vertreter mit konstanter Skalarkrümmung zu bestimmen, betrachtete Yamabe 1960 [YH] das Variationsproblem

$$A(\tilde{g}) = \int_M S_{\tilde{g}}\, dv_{\tilde{g}} \longrightarrow \text{Minimum in der Klasse}$$

$$C_0(g) = \left\{ \tilde{g} \in C(g) \mid \mathrm{vol}_{\tilde{g}}(M) = 1 \right\} .$$

Die Lösbarkeit dieser Aufgabe durch eine glatte Metrik $\tilde{g}$ wird in der Literatur als *Yamabevermutung* bezeichnet; die Zahl

$$\lambda(g) = \inf \{ A(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in C_0(g) \}$$

heißt *Yamabeinvariante* von $C(g)$. Ist $\tilde{g} \in C_0(g)$ eine Metrik mit $A(\tilde{g}) = \lambda(g)$, so liefern die Eulergleichungen des Variationsproblems $S_{\tilde{g}} \equiv \lambda(g)$ [SR2; S. 126].

Sei g_0 die auf $\mathrm{vol}_{g_0}(S^n) = 1$ normierte Standardmetrik auf der n-dimensionalen Sphäre. g_0 ist eine Lösung des Variationsproblems [LP; 3.2] auf S^n. Da die Gruppe konformer Diffeomorphismen von (S^n, g_0) nichtkompakt ist, andererseits aber obiges Variationsproblem konform invariant ist, darf man im allgemeinen nicht erwarten, daß Minimalfolgen konvergente Teilfolgen besitzen. Nach Arbeiten von Trudinger [TN] and Aubin [AT] ist dies aber der Fall, wenn nur gilt:

$$\lambda(g) < \lambda(g_0) = n(n-1)\,\omega_n(S^n)^{\frac{2}{n}} .$$

Dadurch ist die Bestätigung der Yamabevermutung auf das Problem reduziert, in $C(g)$ eine Metrik $\tilde{g}$ zu bestimmen, für die gilt:

$$\mathrm{vol}_{\tilde{g}}(M) = 1 \quad , \quad A(\tilde{g}) < \lambda(g_0) .$$

Ist $\dim M \geq 6$ und M nicht konform flach, so existiert nach Aubin [AT] eine solche Metrik, die aus einer beliebigen Metrik durch lokale konforme Abänderung in der Umgebung eines Punktes, in dem der Weyltensor nicht verschwindet, gewonnen wird. In den verbleibenden Fällen muß eine solche Testmetrik global konstruiert werden. Nach Schoen [SR1] und [LP] kann dies wie folgt geschehen:

Zunächst sei o.B.d.A. $\lambda(g) > 0$. In diesem Fall existiert die Greenfunktion G_p des *konformen Laplaceoperators*

$$L_g = 4\,\frac{n-1}{n-2}\,\Delta_g + S_g$$

im Punkt $p \in M$; G_p ist strikt positiv und besitzt nur einen Pol in p . Die Mannigfaltigkeit $(\hat{M}, \hat{g}) = (M - \{p\}, G_p^{\frac{4}{n-2}}\, g)$ hat Skalarkrümmung identisch Null und ist (nach evtl. lokaler konformer Abänderung der Metrik g) asymptotisch flach. Es zeigt sich, daß die Metrik $\hat{g}$ - nach geschickter Glättung der Singularität bei p - eine geeignete Testmetrik darstellt, *wenn nur die Energie* $E(\hat{g})$ *positiv ist.* Also impliziert das Positive Energy Theorem die Bestätigung der Yamabevermutung in den verbleibenden Fällen.

Da die Yamabevermutung für konform flache Mannigfaltigkeiten der Dimension mindestens vier von Schoen und Yau mit anderen Methoden gezeigt wurde [SY5], können wir genauer sagen, daß das Positive Energy Theorem für die Yamabevermutung nur in den Dimensionen drei bis fünf benötigt wird.

Das Positive Energy Theorem hat - insbesondere im dreidimensionalen Fall - seit 1960 eine Reihe von Autoren beschäftigt. Eine Auflistung der einzelnen Beiträge, die größtenteils in der physikalischen Literatur erschienen sind, findet man zum Beispiel in dem Artikel von Brill und Jang [BJ] sowie in der Arbeit von Witten [WE]. Der erste vollständige Beweis (in der Dimension drei) unserer Version des Satzes gelang 1979 Schoen und Yau [SY1,2]. Kurz danach gab Witten [WE] einen völlig anderen Beweis, der 1986 von Bartnik unter der Voraussetzung, daß die zweite Stiefel-Whitney-Klasse von M verschwindet, auf beliebige Dimensionen übertragen werden konnte [BR]. Beide Beweise können durch sehr einfache Modifikationen auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Mannigfaltigkeit M mehrere asymptotische Enden besitzt. Insbesondere stellt die Forderung der Orientierbarkeit von M keine wesentliche Einschränkung dar.

Sowohl der Beweis von Witten als auch der Beweis von Schoen und Yau sind, wenn man sehr stark vereinfacht, an Vorbilder der klassischen Differentialgeometrie angelehnt. Sei etwa (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit der positiven unteren Krümmungsschranke $\mathrm{Ric} \geq \frac{n-1}{r^2} g$, wobei $r > 0$ ist. Um hieraus eine Folgerung für die Topologie von M zu ziehen, hat man zwei Möglichkeiten:

a) Man verwendet die *Weitzenbockformel für Eins-Formen* auf M :

$$\Delta\alpha = D^*D\alpha + \mathrm{Ric}(\alpha)$$

Ist α harmonisch, so folgt durch Skalarmultiplikation mit α und partielle Integration über M :

$$0 = \int_M |D\alpha|^2 \, dv + \int_M Ric(\alpha,\alpha) \, dv \quad .$$

Folglich ist α identisch Null, also nach Hodge die erste de-Rham-Cohomologie von M trivial. Dies ist das klassische Ergebnis von Bochner, siehe etwa [GHL; 4.37].

b) Unter der *indirekten Annahme* diam $M > \pi$ findet man eine minimierende Geodätische $c: [0,L] \to M$, deren Länge L echt größer als π ist. Da c minimiert, ist die *zweite Variation der Bogenlänge* nichtnegativ, das heißt für jedes Vektorfeld X längs c, das in den Randpunkten von c verschwindet und orthogonal zu c' ist, gilt:

$$0 \leq I(X,X) = -\int_0^L g(X'' + R(X,c')c',X) \, ds \quad .$$

Sei nun $\{c',e_2,\ldots,e_n\}$ eine parallele Orthonormalbasis längs c. Dann wählen wir für $2 \leq i \leq n$

$$X_i(s) = \sin\left(\frac{\pi s}{L}\right) e_i$$

und erhalten durch Summation der zweiten Variationen über i:

$$0 \leq \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi s}{L}\right) \left((n-1)\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - Ric(c',c')\right) ds \quad .$$

Aus der Krümmungsvoraussetzung folgt $L \leq \pi$, ein Widerspruch. Da dasselbe Argument auch für die universelle Überlagerung von M zutrifft, ist diese nach Hopf-Rinow kompakt, also ist - ähnlich wie in a) - die Fundamentalgruppe von M endlich. Diesen Beweis des Satzes von Bonnet-Myers findet man in [GHL; 3.85].

Will man sich beim Beweis des Positive Energy Theorem eine ähnliche Argumentation zunutze machen, so steht man vor dem Hindernis, daß man nur eine viel schwächere Voraussetzung für die Krümmung hat: Nicht der volle Riccitensor, sondern nur seine *Spur* ist nichtnegativ. Um mit einer Weitzenbockformel arbeiten zu können, muß man

ein Vektorbündel über M finden, dessen "Krümmungsendomorphismus" durch Multiplikation mit der Skalarkrümmung gegeben ist. Falls die zweite Stiefel-Whitney-Klasse von M verschwindet, existiert in der Tat ein solches Bündel: das *Bündel der Spinoren* über M. Die Weitzenbockformel lautet dann

$$\Delta\psi = D^*D\psi + \frac{1}{4}S\psi \quad .$$

In Wittens Beweis wird ein spezieller harmonischer Spinor ψ konstruiert, so daß sich aus der partiellen Integration ergibt:

$$\frac{1}{4}E(g) = \frac{1}{\chi^{n-1}(S^{n-1})}\int_M \left(|D\psi|^2 + \frac{1}{4}S|\psi|^2\right) dv \geq 0 \quad .$$

Eine vollständige Darstellung dieses Arguments ist in der Arbeit von Bartnik [BR; § 6] enthalten.

Anstelle der Geodätischen treten im Beweis von Schoen und Yau *minimierende Hyperflächen*, weil in deren Stabilitätsungleichung mit Hilfe der Gaußgleichungen die Skalarkrümmung von M eingeführt werden kann. Unter der indirekten Annahme $E(g) < 0$ wird eine spezielle minimierende Hyperfläche Σ konstruiert. Die dabei auftretenden Existenz- und Regularitätsprobleme sind keineswegs trivial; sie werden im Kontext der *Geometrischen Maßtheorie* gelöst. Danach wird durch Wahl von geeigneten Variationen ein Widerspruch zur Stabilität von Σ herbeigeführt, und zwar in Dimension drei mit Hilfe des Satzes von Gauß-Bonnet und in höheren Dimensionen induktiv aus der Gültigkeit des Positive Energy Theorem in der jeweiligen Hyperflächendimension.

Der von mir dargestellte Beweis liefert das Positive Energy Theorem in den Dimensionen drei bis sieben. In höheren Dimensionen ergeben sich zusätzliche technische Schwierigkeiten aufgrund des möglichen Auftretens von Singularitäten. Nach einer Ankündigung von Schoen und Yau [SR2; S. 145] können diese aber überwunden werden.

Notationsvereinbarungen

M bezeichnet eine glatte (C^∞-) Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, ist stets $n \geq 3$. Wir führen die Abkürzungen $p = \frac{2n}{n-2}$, $a = 4\frac{n-1}{n-2}$ ein. Eine Metrik auf M ist eine glatte Riemannsche Metrik.

$\mathcal{H}^k$ ist das k-dimensionale Hausdorffmaß im $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ist $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y-x| < r\}$ und

$$\alpha_n = \mathcal{L}^n(B_1(0)) \qquad \omega_n = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_1(0)) \quad .$$

Für Mengen U, V gilt $U \subset\subset V$, falls $\overline{U}$ eine kompakte Teilmenge von V ist.

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung endlichdimensionaler Vektorräume mit Basen $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{F}$. Die Matrix von f bzgl. dieser Basen ist $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(f)$, die Spur von f ist $\operatorname{tr} f$, die Determinante von f ist $\det f$. f induziert eine lineare Abbildung $\Lambda_k f: \Lambda_k V \to \Lambda_k W$ der k-ten äußeren Potenzen von V bzw. W. Ferner ist $\ker f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$.

Sind X, Y normierte Funktionenräume, so bezeichnet $X \subset Y$ eine stetige Inklusion, $X \subset\subset Y$ eine kompakte Inklusion. Wir machen bisweilen von der Summationskonvention - über doppelt auftretende Indizes ist zu summieren - Gebrauch, was aus dem Zusammenhang ersichtlich sein sollte. Ferner verwenden wir die Landauschen Symbole

$$f = O(x) \text{ bei } x \to x_0 \Leftrightarrow \limsup_{x \to x_0} \frac{|f|}{|x|} < \infty$$

$$f = o(x) \text{ bei } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{|f|}{|x|} = 0 \quad .$$

1. Einige geometrische Formeln

In diesem Abschnitt vereinbaren wir die notwendigen Begriffe aus der Riemannschen Geometrie und leiten die in der Arbeit benötigten geometrischen Formeln her, soweit sie aus der Literatur nicht gut zitierbar sind.

Im n-dimensionalen euklidischen Raum steht uns ein natürlicher Ableitungsbegriff in Form der *Richtungsableitung* zur Verfügung. Für ein Vektorfeld X und einen Tensor T ist diese gegeben durch

$$(\partial_X T)(p) = \frac{d}{dt} T(c(t))\Big|_{t=0} .$$

Dabei ist $c(t)$ eine Kurve mit $\dot{c}(0) = X(p)$. Sind nun M und N Mannigfaltigkeiten und $f: M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, so liefert eine Übertragung der Richtungsableitung den Begriff des *Differentials* von f:

$$\partial f(X) = \partial_X f \quad \text{für ein Vektorfeld } X \text{ auf } M .$$

Wenden wir dies auf einen Tensor T auf M an, so sehen wir, daß die Richtungsableitung von T kein Element desselben Bündels ist, in dem T definiert ist. Sind uns aber lokale Koordinaten $x = (x^1,\ldots,x^n)$ von M gegeben, so können wir eine *koordinatenabhängige Richtungsableitung* definieren, indem wir den Definitionsbereich der Karte mit seinem Bild in $\mathbb{R}^n$ identifizieren. Bezüglich dieser Differentiation sind also Koordinatentensoren als konstant anzusehen.

Ist M zusätzlich mit einer Riemannschen Metrik g versehen, so steht uns ein natürlicher Ableitungsbegriff in Form der *kovarianten Ableitung* D (nach Levi-Civita) zur Verfügung. D ist auf Tensoren beliebigen Typs erklärt. Für Vektorfelder X, Y gilt

$$D_X Y = \partial_X Y + \Gamma(X,Y) .$$

Dabei ist der (koordinatenabhängige) *"Christoffeltensor"* eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft

$$2g(\Gamma(X,Y),Z) = (\partial_X g)(Y,Z) + (\partial_Y g)(Z,X) - (\partial_Z g)(X,Y) \quad .$$

Die Metrik g kann auf Tensoren beliebigen Typs fortgesetzt werden und die kovariante Ableitung respektiert die Metrik:

$$\partial_X(g(Y,Z)) = g(D_X Y,Z) + g(Y,D_X Z) \quad .$$

Die Symmetrie von D schreibt sich in unserer Notation

$$\Gamma(X,Y) = \Gamma(Y,X) \Leftrightarrow D_X Y - D_Y X = \partial_X Y - \partial_Y X = [X,Y] \quad .$$

Die kovariante Ableitung kann iteriert werden, beispielsweise ist

$$D^2_{X,Y} Z = D_X(D_Y Z) - D_{D_X Y} Z \quad .$$

D^2 ist im allgemeinen nicht symmetrisch in X und Y, die entsprechende Antisymmetrisierung liefert den *Krümmungstensor* der Metrik g:

$$R(X,Y)Z = D^2_{X,Y} Z - D^2_{Y,X} Z \quad \text{bzw.}$$

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) \quad .$$

Sei $\{e_i \mid 1 \le i \le n\}$ eine lokal definierte Orthonormalbasis. Der Krümmungstensor kann zweimal kontrahiert werden:

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(e_i,X,Y,e_i) \qquad (\textit{Riccitensor})$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i,e_i) \qquad (\textit{Skalarkrümmung}) \quad .$$

Sei f eine C^∞-Funktion auf M. Der *Gradient von* f ist das Vektorfeld ∇f, definiert durch

$$g(X,\nabla f) = \partial_X f \quad .$$

Für ein Vektorfeld X definieren wir ferner

$$\operatorname{div} X = \operatorname{tr} DX = \sum_{i=1}^{n} g(D_{e_i}X,e_i) \quad .$$

Zusammensetzen der letzten beiden Differentialoperatoren ergibt den *Laplace-(Beltrami-)Operator*

$$\Delta_g f = -\operatorname{div} \nabla f \quad .$$

(Nach unserer Wahl ist $\Delta f = -f''$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ist $\Omega \subset M$ glatt berandet, und bezeichnet ν die äußere Normale an $\partial\Omega$, so lautet der *Divergenzsatz*

$$\int_\Omega \operatorname{div} X \, dv^n = \int_{\partial\Omega} g(X,\nu) \, dv^{n-1} \quad .$$

Dabei bezeichnen wir allgemein mit v^k für $0 \le k \le n$ das k-dimensionale Volumenmaß in M bzgl. der Metrik g.

1.1 Konforme Wechsel der Metrik

(1.1.1) Die Metrik $\tilde{g}$ heißt *konform (äquivalent)* zur Metrik g, wenn eine strikt positive Funktion φ existiert mit

$$\tilde{g} = \varphi^{p-2} g \qquad \left(p = \frac{2n}{n-2}\right) \quad .$$

φ^{p-2} heißt der *Konformfaktor* von $\tilde{g}$ bzgl. g.

Der Grund für den etwas kompliziert anmutenden Ansatz des Konformfaktors liegt in der Einfachheit der Umrechnungsformel (1.1.11) für die Skalarkrümmungen. Bei konformen Wechseln bleiben die Winkel zwischen Vektoren erhalten, die Längen ändern sich

dagegen wie folgt:

$$\|X\| = \varphi^{\frac{p}{2}-1} |X| \quad . \tag{2}$$

Dabei sind $|\cdot|$ bzw. $\|\cdot\|$ die Normen von g bzw. $\tilde{g}$. Ist daher $\{e_i | \ 1 \le i \le k\}$ eine g-orthonormale Menge, so trifft dasselbe für $\{\tilde{e}_i = \varphi^{1-\frac{p}{2}} e_i | \ 1 \le i \le k\}$ bzgl. $\tilde{g}$ zu. Insbesondere folgt für die Transformation des k-dimensionalen Volumens

$$\tilde{v}^k = \varphi^{k(\frac{p}{2}-1)} v^k \qquad (0 \le k \le n) \quad . \tag{3}$$

Für den Gradienten ergibt sich

$$\tilde{\nabla} f = \varphi^{2-p} \nabla f \quad . \tag{4}$$

Benutzt man die am Anfang des Abschnitts zitierte Charakterisierung des "Christoffeltensors", so erhält man als Umrechnungsformel für die kovariante Ableitung [BA; 1.159 a)]:

$$\tilde{D}_X Y = D_X Y + \frac{p-2}{2\varphi} \left((\partial_X \varphi) Y + (\partial_Y \varphi) X - g(X,Y) \nabla \varphi \right) \quad . \tag{5}$$

Hieraus folgt

$$\tilde{g}(\tilde{D}_X Y, Z) = \varphi^{p-2} \left\{ g(D_X Y, Z) + \frac{p-2}{2\varphi} \left((\partial_X \varphi)\, g(Y,Z) + (\partial_Y \varphi)\, g(Z,X) - g(X,Y)(\partial_Z \varphi) \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{g}(\tilde{D}_X Y, X) = \varphi^{p-2} \left\{ g(D_X Y, X) + \frac{p-2}{2\varphi}\, g(X,X)\, (\partial_Y \varphi) \right\} \quad .$$

Wählen wir $X = \tilde{e}_i$ und summieren über i, so erhalten wir:

$$\tilde{\operatorname{div}}\, Y = \operatorname{div} Y + p \frac{\partial_Y \varphi}{\varphi} \quad . \tag{6}$$

Für die *Hesseform* einer Funktion f ergibt sich aus (4) und (5)

$$\tilde{D}^2_{X,X} f = D^2_{X,X} f + \frac{p-2}{2\varphi} \left\{ g(X,X)\, \partial_{\nabla f} \varphi - 2(\partial_X \varphi)(\partial_X f) \right\} \tag{7}$$

$$(8) \qquad \tilde{\Delta} f \;=\; \varphi^{2-p}\left\{\Delta f - \frac{2}{\varphi}\, g(\nabla f, \nabla \varphi)\right\} \quad .$$

Wir kommen nun zu den Umrechnungsformeln für die Krümmungsgrößen, die man z.B. in dem Buch von Besse [BA; 1.159 b)-f)] findet. Es ist nützlich, folgende Abkürzung einzuführen:

Das *Kulkarni-Nomizu-Produkt* zweier symmetrischer (0,2)-Tensoren a und b ist der (0,4)-Tensor, definiert durch

$$(a \otimes b)(X,Y,Z,W) \;=\; a(X,Z)b(Y,W) - a(X,W)b(Y,Z) + b(X,Z)a(Y,W) - b(X,W)a(Y,Z)$$

Damit schreibt sich die Umrechnungsformel für den Krümmungstensor (als (0,4)-Tensor):

$$(9) \qquad \tilde{R} \;=\; \varphi^{p-2}\left[R + \frac{p-2}{2\varphi}\left(\frac{p-2}{4\varphi}\,|\nabla\varphi|^2 g + D^2\varphi - \frac{p}{2\varphi}\, D\varphi \otimes D\varphi\right) \otimes g\right] \quad .$$

Die Formel kann nun wieder kontrahiert werden und liefert:

$$(10) \qquad \widetilde{Ric} \;=\; Ric + \frac{2}{\varphi}\left[\frac{p}{2\varphi}\, D\varphi \otimes D\varphi - D^2\varphi\right] + \frac{p-2}{2\varphi}\left[\Delta\varphi - \frac{1}{\varphi}\,|\nabla\varphi|^2\right] g$$

$$(11) \qquad \tilde{S} \;=\; \varphi^{1-p}\left[a\Delta\varphi + S\varphi\right] \qquad \left(a = 4\,\frac{n-1}{n-2}\right) \quad .$$

Der in dieser Identität auftretende Operator $L = a\Delta + S$ heißt der *konforme Laplaceoperator von* g . Er ist konform invariant in folgendem Sinne [LP; 2.7]:

$$(12) \qquad \tilde{L}\left(\frac{u}{\varphi}\right) \;=\; \varphi^{1-p}\, Lu \quad .$$

Ein bekannter Spezialfall dieser Invarianz ist die Kelvintransformation in $\mathbb{R}^n$.

1.2 Hyperflächen

In diesem Abschnitt betrachten wir eine eingebettete Hyperfläche in der Mannigfaltigkeit M :

$$\iota\colon \Sigma^{n-1} \subset (M^n, g) \quad .$$

Die Einschränkung der Metrik g auf Σ bezeichnen wir wieder mit g. Ist $x \in \Sigma$ und $X \in T_xM$, so besitzt X eine *horizontale* und eine *vertikale Komponente*: $X = X^\top \oplus X^\perp$. Da wir zunächst nur lokale Betrachtungen durchführen, denken wir uns auf Σ ein stetiges Einheitsnormalenfeld ν gegeben. Ein auf Σ definiertes Vektorfeld heißt tangential, wenn $X \equiv X^\top$. Die der Einschränkung von g auf Σ zugeordnete kovariante Ableitung bezeichnen wir mit $D^\top$. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt durch die berühmte Formel von Levi-Civita:

$$(1) \qquad D^\top_X Y = (D_X Y)^\top \quad \text{für} \quad X, Y \in C^\infty(T\Sigma) \quad .$$

Der Normalen ν ordnen wir die *zweite Fundamentalform* zu, indem wir setzen

$$(2) \qquad \ell(X,Y) = -\langle D_X Y, \nu\rangle = \langle D_X \nu, Y\rangle \quad .$$

(Ab jetzt schreiben wir auch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für g.)
Wegen $D_X Y - D_Y X = [X,Y]$ = tangential ist ℓ symmetrische Bilinearform. Wir betrachten auch den *Weingartenoperator* $S \in C^\infty(\mathrm{End}\, T\Sigma)$, definiert durch

$$(3) \qquad \ell(X,Y) = \langle SX, Y\rangle \quad \text{für alle} \quad X, Y \in C^\infty(T\Sigma) \quad .$$

Verwechslungen zwischen dem Weingartenoperator und der Skalarkrümmung sollten ausgeschlossen sein. Bisweilen ist es nützlich, die von der Wahl der Normalen unabhängige *vektorielle zweite Fundamentalform* einzuführen:

$$(4) \qquad L(X,Y) = -\ell(X,Y)\,\nu \quad .$$

Als wichtigste skalare Krümmungsfunktionen hat man:

$$(5) \qquad H = \mathrm{tr}\, S \qquad (\textit{mittlere Krümmung})$$

$$(6) \qquad K = \det S \qquad (\textit{Gaußsche Krümmung}) \quad .$$

Aus den Definitionen ergeben sich leicht die *Hyperflächengleichungen*

$$(7) \qquad \begin{cases} D_X \nu &= SX \\ (D_X Y)^\perp &= L(X,Y) \end{cases} \quad \text{für } X, Y \in C^\infty(T\Sigma) \ .$$

Neben diesen genügt die Einbettung $\Sigma \subset M$ noch zwei weiteren Symmetrien, nämlich den *Gaußgleichungen*

$$(8) \qquad R_M(X,Y,Z,W) - R_\Sigma(X,Y,Z,W) = \ell(X,Z)\,\ell(Y,W) - \ell(X,W)\,\ell(Y,Z) \ ,$$

sowie den Gleichungen von *Mainardi-Codazzi*:

$$(9) \qquad R_M(X,Y)\,\nu = D^\perp_X S \cdot Y - D^\perp_Y S \cdot X \qquad (X,Y,Z,W \in C^\infty(T\Sigma)) \ .$$

Eine Herleitung findet man beispielsweise in [GKM; 3.7]. Seien S_Σ bzw. S_M die Skalarkrümmungen von Σ bzw. M, und $\{e_i \mid 1 \le i \le n-1\}$ eine lokal definierte Orthonormalbasis auf Σ. Dann erhalten wir aus den Gaußgleichungen in diesem Punkt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Big(R_M(e_i,X,Y,e_i) - R_\Sigma(e_i,X,Y,e_i) \Big) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell(e_i,X)\,\ell(e_i,Y) - \sum_{i=1}^{n-1} \ell(e_i,e_i)\,\ell(X,Y)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ric}_M(X,Y) - \mathrm{Ric}_\Sigma(X,Y) = \sum_{i=1}^{n-1} \ell(e_i,X)\,\ell(e_i,Y) + R_M(\nu,X,Y,\nu) - H\,\ell(X,Y) \ .$$

Wählen wir $X = Y = e_j$ und summieren über j, so folgt:

$$S_M - S_\Sigma = |\ell|^2 - H^2 + 2\,\mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)$$

$$\Rightarrow (10) \qquad |\ell|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu) = \frac{1}{2}\left(S_M - S_\Sigma + H^2 + |\ell|^2\right) \ .$$

Diese Formel wird es uns später erlauben, die Skalarkrümmung von M in die zweite Variation einer Hyperfläche einzubringen.

Sei X ein Vektorfeld auf Σ, nicht notwendig tangential. Dann definieren wir die *tangentiale Divergenz* von X durch

einzuführen. Als Normale an $\Sigma = \text{graph } u$ wählen wir

$$\nu(x) = \frac{1}{v(\xi)}(-\partial u(\xi),1) \qquad (x = (\xi,x^n)) \ .$$

ν weist also nach oben. Wir berechnen für X , $Y \in T_x\Sigma$:

$$\ell(X,Y) = \langle \partial_X \nu, Y\rangle = \partial_X\left(\frac{1}{v}\right) \underbrace{\langle(-\partial u,1),Y\rangle}_{=\,0} + \frac{1}{v}\langle \partial_X(-\partial u,1),Y\rangle$$

$$= -\frac{1}{v}\langle \partial_{\overline{X}}\, \partial u,\overline{Y}\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (16) \qquad \ell(X,Y) = -\frac{1}{v}\,\partial^2 u(\overline{X},\overline{Y}) \ .$$

Bei der Berechnung skalarer Krümmungsgrößen müssen wir beachten, daß das Differential der Graphenabbildung eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{n-1}$ im allgemeinen nicht in eine Orthonormalbasis von $T\Sigma$ überführt. Sei aber $\partial u(\xi) \neq 0$. Dann setzen wir $\bar{e}_1 = \frac{\partial u(\xi)}{|\partial u(\xi)|}$ und ergänzen $\bar{e}_1$ zu einer Orthonormalbasis $\bar{\mathcal{E}} = \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_{n-1}\}$ des $\mathbb{R}^{n-1}$. Es existiert genau eine Basis $\mathcal{E} = \{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ von $T_x\Sigma$, deren Projektion $\bar{\mathcal{E}}$ ist, nämlich

$$\mathcal{E} = \left\{\bar{e}_1 + (0,|\partial u(\xi)|),\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_{n-1}\right\} \ .$$

Die Metrik g von Σ besitzt die Koeffizienten (bzgl. $\mathcal{E}$):

$$g_{ij} = \begin{cases} v^2 & \text{für} \quad i = j = 1 \\ \delta_{ij} & \text{sonst} \end{cases} \ .$$

Die Matrix des Weingartenendomorphismus ist

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(S) = (g^{ij})(\ell_{jk}) \ .$$

Insbesondere folgt für die mittlere Krümmung

$$H(x) = \frac{1}{v^2}\left(-\frac{1}{v}\langle \partial_{\bar{e}_1}\, \partial u,\bar{e}_1\rangle\right) + \sum_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{v}\right)\langle \partial_{\bar{e}_i}\, \partial u,\bar{e}_i\rangle \ .$$

Andererseits berechnen wir:

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{div}^{\top} X = \sum_{i=1}^{n-1} \langle D_{e_i} X, e_i \rangle \quad .$$

Wegen (1.2.1) kann dies nicht zu Mehrdeutigkeiten führen. Ist X auf M definiert, so gilt offenbar

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{div}^{\top} X = \operatorname{div} X - \langle D_{\nu} X, \nu \rangle \quad .$$

Wir wollen jetzt untersuchen, welche Konsequenzen ein konformer Wechsel der Metrik g für die Geometrie der Hyperfläche hat. Sei dazu wieder $\tilde{g} = \varphi^{p-2} g$, $\{e_i \mid 1 \le i \le n-1\}$ eine lokal definierte Orthonormalbasis bzgl. g auf Σ , und ν ein g-Normalenfeld. Wir setzen $\tilde{e}_i = \varphi^{1-\frac{p}{2}} e_i$ und $\tilde{\nu} = \varphi^{1-\frac{p}{2}} \nu$. Dann berechnen wir mit X , $Y \in C^{\infty}(T\Sigma)$:

$$\tilde{\ell}(X,Y) = -\tilde{g}(\tilde{D}_X Y, \tilde{\nu}) \overset{(1.1.5)}{=} -\varphi^{\frac{p}{2}-1} \left\langle D_X Y - \frac{p-2}{2\varphi} \langle X,Y \rangle \, \nabla\varphi, \nu \right\rangle$$

$$\Rightarrow \text{(13)} \qquad \tilde{\ell}(X,Y) = \varphi^{\frac{p}{2}-1} \left(\ell(X,Y) + \frac{p-2}{2\varphi} \langle X,Y \rangle \, \partial_{\nu}\varphi \right) \quad .$$

Durch Kontraktion ergibt sich

$$\text{(14)} \qquad \tilde{H} = \varphi^{1-\frac{p}{2}} \left(H + \frac{a}{2\varphi} \partial_{\nu}\varphi \right) \quad .$$

Allgemeiner erhalten wir für die tangentiale Divergenz:

$$\text{(15)} \qquad \widetilde{\operatorname{div}}^{\top} X = \operatorname{div}^{\top} X + \frac{a}{2\varphi} \partial_X \varphi \quad .$$

Als letztes betrachten wir nun den Spezialfall, daß uns Σ als Graph einer C^{∞}-Funktion $u: \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, wobei der $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $\delta = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ausgestattet sei. Die horizontale Komponente eines Vektors $X \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{X}$, und ξ bezeichne einen Punkt aus $\mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Es ist günstig, für die Flächenverzerrung der Graphenabbildung die Abkürzung

$$v(\xi) = \sqrt{1 + |\partial u(\xi)|^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle \partial_{\bar{e}_i} (\frac{\partial u}{v}), \bar{e}_i \rangle = (-\frac{1}{v^2}) (\partial_{\bar{e}_1} v) \, |\partial u| + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^{n-1} \langle \partial_{\bar{e}_i} \partial u, \bar{e}_i \rangle$$

$$= \frac{1}{v} \sum_{i=2}^{n-1} \langle \partial_{\bar{e}_i} \partial u, \bar{e}_i \rangle + \langle \partial_{\bar{e}_i} \partial u, \bar{e}_1 \rangle \left(\frac{1}{v} - \frac{|\partial u|^2}{v^3} \right)$$

$$= \frac{1}{v} \sum_{i=2}^{n-1} \langle \partial_{\bar{e}_i} \partial u, \bar{e}_i \rangle + \frac{1}{v^3} \langle \partial_{\bar{e}_1} \partial u, \bar{e}_1 \rangle \quad .$$

Es ergibt sich die klassische Gleichung

$$H = - \operatorname{div}_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\frac{\partial u}{\sqrt{1+|\partial u|^2}} \right) \quad . \tag{17}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt diese auch in den Punkten, in denen ∂u verschwindet.

1.3 Variationen von Hyperflächen

Die in diesem Abschnitt bewiesenen Formeln für die erste und zweite Variation des Hyperflächeninhalts sind wohlbekannt. Trotzdem war es uns nicht möglich, die von uns benötigte Version Satz (1.3.9) in der Literatur zu finden; deshalb geben wir die Herleitung an.

Sei $\Sigma \subset (M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Hyperfläche. Wir nehmen an, daß sowohl Σ als auch M orientiert sind; insbesondere existiert auf Σ ein global definiertes, stetiges Einheitsnormalenfeld ν. Sei

$$f: (-\epsilon, \epsilon) \times M \longrightarrow M$$

eine glatte Schar von Diffeomorphismen von M. Wir schreiben $f_t(x) := f(t,x)$ für $x \in M$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Mit f assoziiert sind die Vektorfelder

$$\left.\begin{aligned} X_t(x) &= \frac{d}{d\tau} f_\tau(x)\Big|_{\tau=t} \\ X(x) &= X_0(x) \end{aligned}\right\} \qquad (\textit{Geschwindigkeitsfelder})$$

$$Z(x) = \frac{D}{\partial t} X_t(x)\Big|_{t=0} = (D_X X)(x) \qquad (\textit{Beschleunigungsfeld})$$

Aufgrund der Flächenformel ist

$$J(t,x) = |\Lambda_{n-1}(\partial_x f_t)|$$

der Integrand, der die Flächenverzerrung der Abbildung

$$f_t\colon \Sigma \longrightarrow f_t(\Sigma)$$

angibt. Ist $\{e_i |\ 1 \le i \le n-1\}$ eine lokal definierte Orthonormalbasis, so gilt:

$$J(t,x) = \left[\det\left(\langle \partial_x f_t \cdot e_i\ ,\ \partial_x f_t \cdot e_j\rangle\right)\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Wir setzen $\bar{e}_i(t,x) = \partial_x f_t \cdot e_i(x)$.

(1.3.1) $a_X(x) = \frac{d}{dt} J(t,x)\Big|_{t=0}$ heißt *Integrand der ersten Variation des Flächeninhalts* (auf Σ) *bzgl.* X . $b_X(x) = \frac{d^2}{dt^2} J(t,x)\Big|_{t=0}$ heißt *Integrand der zweiten Variation des Flächeninhalts* (auf Σ) *bzgl.* X .

Aufgrund nachstehenden Satzes hängen beide Funktionen tatsächlich nur von X ab.

(1.3.2) Satz.

Unter obigen Voraussetzungen gilt:

(1) $a_X = \operatorname{div}^\top X$

(2) $$b_X = \operatorname{div}^\top Z + (\operatorname{div}^\top X)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |(D_{e_i} X)^\perp|^2 - \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle D_{e_i} X, e_j\rangle \langle D_{e_j} X, e_i\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} R_M(e_i, X, X, e_i) .$$

Beweis: Sei $x \in \Sigma$. Wähle für $1 \leq i \leq n-1$ Kurven $\gamma_i: (-\delta,\delta) \to \Sigma$ mit $\gamma_i(0) = x$, $\gamma_i'(0) = e_i(x)$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t}\Big|_{t=\tau}(\bar{e}_i(t,x)) &= \frac{D}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0}(f_t \circ \gamma_i) \\ &= \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=\tau}(f_t \circ \gamma_i) \\ &= \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0}\Big(X(\tau,\gamma_i(s))\Big) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \qquad \frac{D}{\partial t}\Big|_{t=\tau}(\bar{e}_i(t,x)) = D_{\bar{e}_i(\tau,x)}X =: D_{e_i}X$$

(Letzte Schreibweise ist eine Abkürzung.)

$$\Rightarrow \text{(ii)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\langle \bar{e}_i(t,x),\bar{e}_j(t,x)\rangle = \langle D_{e_i}X,e_j\rangle + \langle e_i,D_{e_j}X\rangle \quad .$$

Weiter erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\langle \bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big\langle \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0}X(t,\gamma_i(s)),\bar{e}_j\Big\rangle + \{i \leftrightarrow j\} \\ &= \Big\langle \frac{D}{\partial t}\Big|_{t=0}\frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0}X(t,\gamma_i(s)),\bar{e}_j\Big\rangle + \langle D_{e_i}X,D_{e_j}X\rangle + \{i \leftrightarrow j\} \\ &= \Big\langle \frac{D}{\partial s}\Big|_{s=0}\frac{D}{\partial t}\Big|_{t=0}X(t,\gamma_i(s)),\bar{e}_j\Big\rangle - R_M(e_i,X,X,e_j) + \langle D_{e_i}X,D_{e_j}X\rangle + \{i \leftrightarrow j\} \quad . \end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$\text{(iii)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\langle \bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle = \langle D_{e_i}Z,e_j\rangle + \langle D_{e_j}Z,e_i\rangle + 2\langle D_{e_i}X,D_{e_j}X\rangle - 2R_M(e_i,X,X,e_j) \quad .$$

Bezeichnen wir für einen glatten Weg $A(t)$ in $GL(n,\mathbb{R})$ mit $A(0) = E_n$, $\alpha = \dot{A}(0)$, $\beta = \ddot{A}(0)$, so bestätigt man - z.B. durch Entwicklung der Determinante - die Identität:

$$\det A(t) = 1 + (\operatorname{tr}\alpha)\,t + \Big[\operatorname{tr}\beta + (\operatorname{tr}\alpha)^2 - |\alpha|^2\Big]\frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^3) \quad .$$

Beachte nun

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} J(t,x)^2 = 2J(0,x)\,\dot{J}(0,x) = 2\dot{J}(0,x) \quad .$$

Somit folgt aus (ii):

$$a_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle\Big) = (\mathrm{div}^\top X)(x) \quad .$$

Weiter gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} J(t,x)^2 = 2(\ddot{J} + \dot{J}^2)$$

$$\Rightarrow \text{(iv)} \qquad \ddot{J} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big|_{t=0} (J^2) - \dot{J}^2 \quad .$$

Da in unserem Fall α durch (ii) und β durch (iii) gegeben ist, gilt:

$$\mathrm{tr}\,\beta = 2\Big[\mathrm{div}^\top Z + \sum_{i=1}^{n-1} |D_{e_i} X|^2 - \sum_{i=1}^{n-1} R_M(e_i, X, X, e_i)\Big]$$

$$(\mathrm{tr}\,\alpha)^2 = 4(\mathrm{div}^\top X)^2$$

$$|\alpha|^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} \Big(\langle D_{e_i} X, e_j\rangle + \langle D_{e_j} X, e_i\rangle\Big)^2$$

$$= 2\sum_{i,j} \langle D_{e_i} X, e_j\rangle^2 + 2\sum_{i,j} \langle D_{e_i} X, e_j\rangle\,\langle D_{e_j} X, e_i\rangle$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n-1} |(D_{e_i} X)^\top|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n-1} \langle D_{e_i} X, e_j\rangle\,\langle D_{e_j} X, e_i\rangle \quad .$$

Einsetzen liefert nun die behauptete Formel für b_X .

Zur Anwendung der Formeln für die Variationen müssen diese mit der Geometrie von Σ in Verbindung gebracht werden. Wir machen dazu die Annahme, daß $\Omega \subset\subset \Sigma$ eine offene glatt berandete Teilmenge von Σ ist. Wir bezeichnen die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ in Σ mit η .

(1.3.3) **Satz.**

Unter obigen Voraussetzungen gilt:

$$\int_\Omega a_X \, dv^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \langle X,\eta\rangle \, dv^{n-2} + \int_\Omega H \, \langle X,\nu\rangle \, dv^{n-1} \quad .$$

Beweis: Wir haben aufgrund des Gaußschen Satzes

$$\int_\Omega \operatorname{div}^T X^T \, dv^{n-1} = \int_{\partial\Omega} \langle X^T,\eta\rangle \, dv^{n-2} = \int_{\partial\Omega} \langle X,\eta\rangle \, dv^{n-2} \quad .$$

Ferner gilt:

$$\operatorname{div}^T X^T = \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle D_{e_i}(\langle X,\nu\rangle \nu), e_i \right\rangle$$

$$= \langle X,\nu\rangle \sum_{i=1}^{n-1} \langle D_{e_i}\nu, e_i\rangle = H\langle X,\nu\rangle \quad . \qquad \blacksquare$$

(1.3.4) $\Sigma \subset M$ heißt *lokal stationär* oder *Minimalfläche*, falls zu jedem Punkt $x \in \Sigma$ eine Umgebung $U \subset M$ mit $v^{n-1}(\Sigma \cap U) < \infty$ existiert, so daß gilt:
Für jede Variationsschar $f_t: M \to M$, $f_0 = id_M$ mit $f_t \equiv id$ auf $M \sim U$ (für alle t) gilt:

$$\frac{d}{dt} v^{n-1}(f_t(\Sigma \cap U))\Big|_{t=0} = 0 \quad .$$

Eine Minimalfläche $\Sigma \subset M$ heißt *stabil bzgl.* U, wenn $v^{n-1}(\Sigma \cap U) < \infty$ und für jede Variationsschar wie oben gilt:

$$\frac{d^2}{dt^2} v^{n-1}(f_t(\Sigma \cap U))\Big|_{t=0} \geq 0 \quad .$$

(1.3.5) Wegen (1.3.3) ist Σ genau dann eine Minimalfläche, wenn die mittlere Krümmung von Σ verschwindet.

Wir kommen jetzt zur Umformung der zweiten Variation. Grundprinzip ist auch hier eine konsequente Zerlegung in tangentiale und vertikale Komponenten. Sei also $\Sigma \subset M$ eine Minimalfläche. Für nicht notwendig tangentiale Felder X, Y setzen wir

$$I(X,Y) = \int_\Omega \Big\{ (\mathrm{div}^\top X)(\mathrm{div}^\top Y) + \sum_{i=1}^{n-1} \langle (D_{e_i}X)^\perp, (D_{e_i}Y)^\perp \rangle - \sum_{i,j=1}^{n-1} \langle D_{e_i}X, e_j \rangle \langle D_{e_j}Y, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} R_M(e_i,X,Y,e_i) \Big\} \, dv^{n-1} .$$

Wir bemerken, daß I symmetrische Bilinearform auf dem Raum aller Vektorfelder längs Σ ist.

(1.3.6) Lemma.

Sei X *tangentiales* Vektorfeld. Dann gilt:

$$I(X,X) = \int_{\partial\Omega} \Big\{ (\mathrm{div}^\top X) \langle X, \eta \rangle - \langle D^\top_X X, \eta \rangle \Big\} \, dv^{n-2} .$$

Beweis: Wir können uns die Basis $\{e_i \mid 1 \le i \le n-1\}$ o.B.d.A. so gewählt denken, daß in einem Punkt x gilt: $D^\top_X e_i = 0$ für alle i. Es gilt:

$$D_{e_i}X = D^\top_{e_i}X + L(e_i,X)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i |(D_{e_i}X)^\perp|^2 = \sum_i \ell(e_i,X)^2 .$$

Ferner ergibt sich aus den Gaußgleichungen:

$$\sum_i R_M(e_i,X,X,e_i) = \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) + \sum_i \ell(e_i,X)^2 .$$

Dabei haben wir benutzt, daß Σ eine Minimalfläche ist. Es ergibt sich also zunächst:

$$I(X,X) = \int_{\Omega} \left\{ (\mathrm{div}_\Sigma X)^2 - \sum_{i,j} \langle D^\tau_{e_i} X, e_j \rangle \langle D^\tau_{e_j} X, e_i \rangle - \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) \right\} dv \ .$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \langle D^\tau_{e_i} X, e_j \rangle \langle D^\tau_{e_j} X, e_i \rangle \\
&\quad = \sum_i \left\langle D^\tau_{\sum_j \langle D^\tau_{e_i} X, e_j \rangle e_j} X, e_i \right\rangle \\
&\quad = \sum_i \left\langle D^\tau_{D^\tau_{e_i} X} X, e_i \right\rangle \\
&\quad = \sum_i \left\langle D^\tau_{e_i} (D^\tau_X X), e_i \right\rangle - \sum_i \left\langle (D^\tau)^2_{e_i, X} X, e_i \right\rangle \\
&\quad = \mathrm{div}^\tau (D^\tau_X X) - \sum_i \left\langle (D^\tau)^2_{e_i, X} X, e_i \right\rangle \ .
\end{aligned}$$

Nun ist andererseits nach Wahl von e_i :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_\Sigma \, \mathrm{div}_\Sigma X, X \rangle &= \partial_X \sum_i \langle D^\tau_{e_i} X, e_i \rangle \\
&= \sum_i \langle (D^\tau)^2_{X, e_i} X, e_i \rangle \ .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{div}_\Sigma X)^2 - \sum_{i,j} \langle D^\tau_{e_i} X, e_j \rangle \langle D^\tau_{e_j} X, e_i \rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma((\mathrm{div}_\Sigma X) X) - \langle \nabla_\Sigma \, \mathrm{div}_\Sigma X, X \rangle - \mathrm{div}_\Sigma (D^\tau_X X) + \sum_i \langle (D^\tau)^2_{e_i, X} X, e_i \rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma((\mathrm{div}_\Sigma X) X) - \mathrm{div}_\Sigma (D^\tau_X X) + \sum_i \langle (D^\tau)^2_{e_i, X} X - (D^\tau)^2_{X, e_i} X, e_i \rangle \\
&= \mathrm{div}_\Sigma((\mathrm{div}_\Sigma X) X) - \mathrm{div}_\Sigma (D^\tau_X X) + \mathrm{Ric}_\Sigma(X,X) \ .
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Umwandlung der Divergenzen in Randintegrale. ∎

(1.3.7) **Lemma.**

Sei X *tangential*, Y *vertikal*. Dann gilt:

$$I(X,Y) = -\int_{\partial\Omega} \langle Y,\nu\rangle \, \ell(X,\eta) \, dv^{n-2} \, .$$

Beweis: Seien e_i wieder die Felder aus (1.3.6). Da Σ Minimalfläche, gilt $\operatorname{div}^T Y = 0$, und genauer

$$D_{e_i} Y = (\partial_{e_i}\langle Y,\nu\rangle)\nu + \langle Y,\nu\rangle \, Se_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i \langle (D_{e_i}X)^\perp, (D_{e_i}Y)^\perp\rangle = -\sum_i (\partial_{e_i}\langle Y,\nu\rangle)\, \ell(e_i,X)$$

$$= -\ell(\nabla_\Sigma \langle Y,\nu\rangle, X)$$

$$\sum_{i,j} \langle D_{e_i}X,e_j\rangle \langle D_{e_j}Y,e_i\rangle = \langle Y,\nu\rangle \sum_{i,j} \langle D_{e_i}X,e_j\rangle \langle e_j,Se_i\rangle$$

$$= \langle Y,\nu\rangle \sum_i \ell(D^T_{e_i}X,e_i)$$

$$\sum_i R_M(e_i,X,Y,e_i) = \langle Y,\nu\rangle \sum_i R_M(e_i,X,\nu,e_i) \, .$$

Damit erhalten wir diesmal als Zwischenresultat:

$$I(X,Y) = \int_\Omega \left\{ -\ell(\nabla_\Sigma\langle Y,\nu\rangle,X) - \langle Y,\nu\rangle \Big[\sum_i \ell(D^T_{e_i}X,e_i) + \sum_i R_M(e_i,X,\nu,e_i) \Big] \right\} dv$$

Um die eckige Klammer zu behandeln, verwenden wir die Codazzigleichungen:

$$[\ldots] = \sum_i \left(\langle Se_i, D^\tau_{e_i} X \rangle + \langle (D^\tau_{e_i} S)X, e_i \rangle - \langle (D^\tau_X S)e_i, e_i \rangle \right)$$

$$= \sum_i \left(\langle D^\tau_{e_i}(SX), e_i \rangle - \partial_X \langle Se_i, e_i \rangle \right) \qquad \text{(nach Wahl von } e_i\text{)}$$

$$= \operatorname{div}_\Sigma(SX) \qquad \text{(da } \Sigma \text{ Minimalfläche)} .$$

Es folgt:

$$I(X,Y) = -\int_\Omega \left\{ \langle \nabla_\Sigma \langle Y,\nu \rangle, SX \rangle + \langle Y,\nu \rangle \operatorname{div}_\Sigma(SX) \right\} dv$$

$$= -\int_\Omega \operatorname{div}_\Sigma(\langle Y,\nu \rangle SX)\, dv$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \langle Y,\nu \rangle \, \ell(X,\eta)\, dv \quad . \qquad \blacksquare$$

(1.3.8) Lemma.

Sei X *vertikal* und $\psi := \langle X,\nu \rangle$. Dann gilt:

$$I(X,X) = \int_\Omega \left\{ |\nabla_\Sigma \psi|^2 - \psi^2 (|\ell|^2 + \operatorname{Ric}_M(\nu,\nu)) \right\} dv \quad .$$

Beweis: Wie oben haben wir $\operatorname{div}^\tau X = 0$ und:

$$\sum_i |(D_{e_i} X)^\perp|^2 = \sum_i (\partial_{e_i} \langle X,\nu \rangle)^2 = |\nabla_\Sigma \psi|^2$$

$$\sum_{i,j} \langle D_{e_i} X, e_j \rangle \langle D_{e_j} X, e_i \rangle = \psi^2 \sum_{i,j} \ell(e_i,e_j)\, \ell(e_j,e_i) = \psi^2 |\ell|^2$$

$$\sum_i R_M(e_i,X,X,e_i) = \psi^2 \operatorname{Ric}_M(\nu,\nu) \quad . \qquad \blacksquare$$

Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

(1.3.9) **Satz.**

Sei $\Sigma \subset M$ eine Minimalfläche, $\Omega \subset\subset \Sigma$ glatt berandet, und η die äußere Normale an $\partial\Omega$. Sei X ein Vektorfeld auf M, ν eine stetige Normale auf Σ, $\psi := \langle X,\nu\rangle$, und b_X der Integrand der zweiten Variation auf Σ bzgl. X. Dann gilt:

$$\int_\Omega b_X \, dv^{n-1} = \int_\Omega \left\{ |\nabla_\Sigma \psi|^2 - \psi^2 (|\ell|^2 + \mathrm{Ric}_M(\nu,\nu)) \right\} dv^{n-1} + \int_{\partial\Omega} c_X \, dv^{n-2} ,$$

wobei c_X wie folgt gegeben ist:

$$c_X = \langle D_X X, \eta\rangle + (\mathrm{div}^\Sigma X)\,\langle X,\eta\rangle - \langle D^\Sigma_{X^\Sigma} X^\Sigma, \eta\rangle - 2\psi\ell(X^\Sigma,\eta) .$$

2. Gewichtete Räume auf asymptotisch flachen Mannigfaltigkeiten

Will man die klassische Theorie elliptischer Differentialoperatoren auf beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ auf den Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ ausdehnen, so stellt man fest, daß die üblichen Funktionenräume hierfür ungeeignet sind: beispielsweise ist das Bild des Operators Δ_δ: $W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ nicht abgeschlossen [LR; S. 289]. Es zeigt sich aber, daß eine Kontrolle des Wachstums der Funktionen zu einer befriedigenden Theorie führt.

(2.1) Eine Mannigfaltigkeit M^n *besitzt eine Struktur* $\phi = (M_\infty, x)$ *bei* ∞, wenn folgende Daten vorliegen:

(1) eine disjunkte Zerlegung $M = K \cup M_\infty$, wobei K ein Kompaktum ist;

(2) eine Karte $x = (x^1,\ldots,x^n)$: $M_\infty \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R_0\}$.

M_∞ heißt das *Ende von* M.

Die Karte x erlaubt es uns, das Ende von M mit dem Außengebiet $E_{R_0} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R_0\}$ zu identifizieren. Zur Erklärung geeigneter Funktionenräume auf M wählen wir auf M eine glatte Metrik δ, die auf M_∞ mit der euklidischen Metrik übereinstimmt. Mit δ werden folgende Größen assoziiert:

- die Norm $|\cdot|$ (auf Tensoren beliebigen Typs);
- das Volumenmaß dx;
- die kovariante Ableitung ∂ (nach Levi-Civita) (∂ stimmt auf M_∞ mit der Richtungsableitung überein);
- der Injektivitätsradius $\rho(x)$, $x \in M$ ($\rho(x) \geq |x| - R_0$ für $x \in M_\infty$);
- eine strikt positive, glatte "Abstandsfunktion" $r = r(x)$, die auf M_∞ mit $|x|$ übereinstimmt.

Neben $E_R = \{x \in M_\infty \mid |x| > R\}$ betrachten wir die Gebiete

$$A_R = \{x \in M_\infty \mid R < |x| < 2R\}$$

$$M_R = \{x \in M_\infty \mid R_0 < |x| < R\} \cup K .$$

Um Höldernormen zu erklären, setzen wir für einen Tensor T beliebigen Typs

$$\text{höl}_\alpha(T,x) = \sup_{\text{dist}(y,x) \le \frac{1}{4}\rho(x)} \frac{|T_y(x)-T(x)|}{\text{dist}(x,y)^\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1 , x \in M) .$$

Dabei ist $\text{dist}(x,y)$ der geodätische Abstand von x und y, und $T_y(x)$ derjenige in x definierte Tensor, der aus $T(y)$ durch Parallelverschiebung längs der Kürzesten von y nach x hervorgeht.

Sei $\tau \in \mathbb{R}$ ein Gewichtsparameter. Wir definieren die folgenden Funktionenräume durch die Endlichkeit der nachstehenden Normen:

$$L^q_\tau(\phi): \quad \|u\|_{q,\tau} = \left(\int_M \frac{|u|^q}{r^{n+\tau q}}\, dx\right)^{1/q} \qquad (1 \le q < \infty)$$

$$W^{k,q}_\tau(\phi): \quad \|u\|_{k,q,\tau} = \sum_{i=0}^{k} \|\partial^i u\|_{q,\tau-i} \qquad (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$C^k_\tau(\phi): \quad \|u\|_{C^k_\tau} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in M} \frac{|\partial^i u(x)|}{r^{\tau-i}}$$

$$C^{k,\alpha}_\tau(\phi): \quad \|u\|_{C^{k,\alpha}_\tau} = \|u\|_{C^k_\tau} + \sup_{x \in M} \frac{\text{höl}_\alpha(\partial^k u, x)}{r^{\tau-k-\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1) .$$

Bevor wir die für uns wichtigsten Eigenschaften dieser Räume notieren, machen wir noch drei grundsätzliche Bemerkungen:

a) Benutzt man zur Definition dieser Räume eine "asymptotisch flache" Metrik (siehe (2.3)), muß man für die meisten der nachstehenden Eigenschaften Voraussetzungen an den Abfall von Ableitungen von g stellen. Insbesondere erweist sich eine "intrinsische" Definition der Räume meist als nicht sinnvoll [BR; S. 676], [CM].

b) Im allgemeinen arbeiten wir mit einer festen Struktur ϕ bei ∞, so daß wir auf die Indizierung mit ϕ verzichten können. Wir werden ggfs. die oben definierten Normen auch auf Teilmengen von M - etwa auf A_R, E_R - betrachten. Häufig werden wir mit glatten Funktionen zu tun haben. In diesem Fall ist beispielsweise die Aussage $u \in W^{k,q}_\tau$ gleichbedeutend mit $u \in W^{k,q}_\tau(E_R)$.

c) Funktionen in $W^{k,q}_\tau$ respektive $C^{k,\alpha}_\tau$ wachsen im wesentlichen höchstens wie r^τ. Es besteht aber ein geringfügiger Unterschied zwischen den Sobolev- und den Hölderräumen: Es gilt nämlich

$$r^\tau \in C^{k,\alpha}_\tau \qquad \text{aber}$$
$$r^\tau \notin W^{k,q}_\tau \qquad \text{sondern nur}$$
$$r^\mu \in W^{k,q}_\tau \qquad \text{für alle } \mu < \tau \ .$$

(2.1) Satz (*Eigenschaften gewichteter Räume*)

(1) $L^r_\mu \subset L^q_\tau$, falls $1 \le q \le r < \infty$, $\mu < \tau$

(2) $C^{0,\beta}_\mu \subset\subset C^{0,\alpha}_\tau$, falls $0 < \alpha < \beta < 1$, $\mu < \tau$

(3) $C^{k,\alpha}_\mu \subset W^{k,q}_\tau$, falls $\mu < \tau$ und $0 \le \alpha < 1$

(4) $W^{k,q}_\tau \subset C^{0,\alpha}_\tau$, falls $0 < k - \frac{n}{q} =: \alpha < 1$

Genauer gilt für $u \in W^{k,q}_\tau$

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}_\tau(A_R)} \to 0 \quad \text{mit} \quad R \to \infty \ .$$

(5) Für $u \in C^0_\tau$, $v \in L^q_\mu$ gilt:

$$\|uv\|_{q,\tau+\mu} \le \|u\|_{C^0_\tau} \|v\|_{q,\mu} \ .$$

(6) Für $u \in C^{k,\alpha}_\tau$, $v \in C^{k,\alpha}_\mu$ gilt

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}_{\tau+\mu}} \le C \|u\|_{C^{k,\alpha}_\tau} \|v\|_{C^{k,\alpha}_\mu} \ .$$

(7) Sei $q > n$, $k \geq 1$. Dann gilt

$$\|uv\|_{k,q,\tau+\mu} \leq C \|u\|_{k,q,\tau} \|v\|_{k,q,\mu} .$$

Beweis: (3) und (5) sind trivial.

(1) und (4) findet man in [BR; 1.5 bzw. 1.11].

(2) und (6) sind die Lemmata 1 und 3 in [CSCB].

(7) folgt, indem man auf ein Produkt $(\partial^i u)(\partial^j v)$ zunächst (5) anwendet, wobei für die Ableitung höherer Ordnung die Integralnorm genommen wird. Die C^0-Norm der niedrigeren Ableitung kann dann mit (4) abgeschätzt werden. ∎

Das folgende Lemma zeigt, daß die gewichteten Räume unter der Bildung gewisser Funktionen abgeschlossen sind.

(2.2) Lemma.

Sei $\tau > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Sei $u: M \to \mathbb{R}$ mit $u(x) > -1$ für alle $x \in M$.

(1) $u \in W^{k,q}_{\tau} \Rightarrow (1+u)^s - 1 \in W^{k,q}_{\tau}$, falls $q > n$.

(2) $u \in C^{k,\alpha}_{\tau} \Rightarrow (1+u)^s - 1 \in C^{k,\alpha}_{\tau}$.

(3) Falls eine Folge von Funktionen u_i in $W^{k,q}_{\tau}$ bzw. $C^{k,\alpha}_{\tau}$ konvergiert, so gilt entsprechendes für die Folge $(1+u_i)^s - 1$.

Beweis: Wir betrachten nur die Aussage in den Sobolevräumen. Die entsprechende Aussage in den Hölderräumen folgt analog. Wegen (1.4) gilt:

$$L := \sup u \leq C \|u\|_{k,q,\tau}$$
$$\ell := \inf u > -1 .$$

Sei $\ell \leq \tilde{u} \leq u \leq L$. Dann gilt:

$$|(1+u)^s - (1+\tilde{u})^s| \leq |s| \int_{\tilde{u}}^{u} (1+v)^{s-1}\, dv$$
$$\leq C(s,\ell,L)\, |u-\tilde{u}| \ .$$

Wählen wir insbesondere $u = 0$ oder $\tilde{u} = 0$, so folgt: $|(1+u)^s - 1| \leq C(s,\ell,L)\,|u|$. Hieraus folgt $(1+u)^s - 1 \in L^q_\tau$. Die höhere Integrabilität ergibt sich nun leicht durch Induktion über k, womit (1) bewiesen ist. (3) folgt ebenso, wenn wir $\tilde{u} = u_i$ wählen und beachten, daß wir aufgrund der Konvergenz in $W^{k,q}_\tau$ die Schranken ℓ und L gleichmäßig wählen können. ∎

Wir präzisieren nun den in der Einleitung benutzten Begriff der asymptotisch flachen Metrik.

(2.3) Sei M eine Mannigfaltigkeit mit einer Struktur ϕ bei ∞. Eine glatte Metrik g auf M heißt *asymptotisch flach von der Ordnung* $\tau > 0$, falls gilt:

$$g - \delta \in W^{2,q}_\tau \quad \text{für ein} \quad q > n \ .$$

Für einige der folgenden Aussagen hätte es ausgereicht, nur $g - \delta \in W^{1,q}_\tau$ vorauszusetzen. Spätestens in der Definition der Energie benötigen wir aber einen Abfall der zweiten Ableitungen. Wegen (2.1.4) implizieren unsere Annahmen:

$$g - \delta = o(r^{-\tau})$$
$$\partial g = o(r^{-\tau-1}) \ .$$

Insbesondere ist g gleichmäßig äquivalent zur "euklidischen" Metrik δ. Wir untersuchen nun das asymptotische Verhalten einiger aus der Metrik g gebildeten Funktionen.

(2.4) Lemma.

Sei g asymptotisch flach von der Ordnung $\tau > 0$ mit einem $q > n$. Die untenstehenden Größen sind bzgl. der asymptotischen Koordinaten zu bilden. Dann gilt:

(1) $\det(g_{ij}) - 1 \in W^{2,q}_{-\tau}$

(2) $[\det(g_{ij})]^s - 1 \in W^{2,q}_{-\tau}$ (für $s \in \mathbb{R}$)

(3) $g^{ij} - \delta_{ij} \in W^{2,q}_{-\tau}$

(4) $\Gamma^k_{ij} \in W^{1,q}_{-\tau-1}$

(5) $S_g \in W^{0,q}_{-\tau-2}$

Zusatz: Sind $g^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, g asymptotisch flache Metriken, so daß $\|g-g^{(k)}\|_{2,q,-\tau} \to 0$ mit $k \to \infty$ für ein $\tau > 0$, $q > n$, so konvergieren auch die entsprechenden Normen der Ausdrücke (1) - (5) gegen Null.

Beweis: Wir setzen $g - \delta = h \in W^{2,q}_{-\tau}$.

zu (1): Sei S_n die n-dimensionale symmetrische Gruppe. Dann gilt

$$\det(g_{ij}) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, g_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n\pi(n)} \quad .$$

Ersetzen wir darin g durch $\delta + h$, so sehen wir, daß es ausreicht, ein Produkt der Eintragungen von h der Länge höchstens n abzuschätzen. Dies folgt aber aus (2.1.7). Der Zusatz ergibt sich ebenfalls aus (2.1.7) durch Mischen der Terme in obigen Produkten und Abschätzung mit der Dreiecksungleichung.

zu (2): Dies folgt aus (1) wegen (2.2.1) und (2.2.3).

zu (3): Wir verwenden die Cramersche Regel. Danach gilt:

$$g^{ij} = (-1)^{i+j} (\det g)^{-1} |g|_{ji} \quad .$$

Dabei bezeichnet $|g|_{ji}$ die Determinante der Matrix, die aus (g_{ij}) durch Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte hervorgeht. Wie in (1) sehen wir

$$|g|_{ji} = (-1)^{i+j} \delta_{ij} + W^{2,q}_{-1} \quad .$$

Ferner haben wir wegen (2)

$$(\det g)^{-1} = 1 + W^{2,q}_{-1} \quad .$$

Damit ergibt sich (3) wieder aus (2.1.7) und (2.1.1), ebenso der Zusatz.

zu (4): Unter Verwendung der Summenkonvention gilt:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \right) \quad .$$

Darauf läßt sich wieder (2.1.7) wegen (3) anwenden.

zu (5): Die klassische Formel für die Skalarkrümmung in Koordinaten lautet [LP; 9.2]:

$$S = g^{jk} \left(\partial_i \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{ij} + \Gamma^i_{il} \Gamma^l_{jk} - \Gamma^i_{kl} \Gamma^l_{ij} \right) \quad .$$

Nach (3), (4) gilt $g^{jk} \in W^{2,q}_{\delta}$, $\partial\Gamma \in W^{0,q}_{-1,2}$ sowie wegen (2.1.7) $\Gamma \cdot \Gamma \in W^{1,q}_{2\delta,-2} \subset W^{0,q}_{-1,2}$. Der in Γ quadratische Term ist daher klar, und für den anderen verwenden wir (2.1.4):

$$g^{jk} \in C^{1,\alpha}_{\delta} \Rightarrow g^{jk} \cdot \partial\Gamma \in W^{0,q}_{-1,2} \text{ wegen (2.1.5)} \quad .$$

Der Zusatz ergibt sich entsprechend. ∎

(2.5) Die Aussagen des Lemmas (2.4) gelten sinngemäß auch dann, wenn man den Raum $W^{2,q}_{-1}$ durch den Raum $C^{2,\alpha}_{-1}$ ersetzt. Auf einen Beweis verzichten wir.

Sei P ein *linearer, elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung*, der auf Funktionen $u: E_R \to \mathbb{R}$ operiert:

$$(Pu)(x) = - a^{ij}(x)\, \partial^2_{ij} u(x) + b^i(x)\, \partial_i u(x) + c(x)\, u(x)$$

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x) \quad .$$

Mit Bartnik [BR; 1.5] sagen wir:

(2.6) P heißt *asymptotisch zu* Δ_δ *mit Rate* $\tau > 0$, falls für ein $q > n$, $\lambda > 0$, $\Lambda < \infty$ folgendes gilt:

(1) $\lambda |\xi|^2 \le a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \le \lambda^{-1} |\xi|^2 \qquad \forall x \in E_R\,,\ \xi \in \mathbb{R}^n$

(2) $\|a^{ij} - \delta_{ij}\|_{1,q,-\tau} + \|b^i\|_{0,q,-\tau-1} + \|c\|_{0,q,-\tau-2} \le \Lambda$.

(2.7) Lemma.

Sei g asymptotisch flach von der Ordnung $\tau > 0$ mit einem $q > n$. Dann ist der konforme Laplaceoperator L_g asymptotisch zu $L_\delta = a\Delta_\delta$ mit der Rate τ.

Beweis: In den asymptotischen Koordinaten gilt:

$$L_g u = - a \left[g^{ij}\, \partial^2_{ij} u + \frac{\partial_i(\sqrt{\det g}\, g^{ij})}{\sqrt{\det g}}\, \partial_j u \right] + S_g u \quad .$$

Hieraus folgt die Bedingung (2.6.2) für die Koeffizienten von L_g wegen (2.4.3), (2.4.2), (2.1.7), (2.4.5). Die Elliptizität (2.6.1) ist klar wegen $g - \delta = o(|x|^{-\tau})$.

∎

Auch bei Verwendung gewichteter Räume muß man gewisse Gewichtsparameter ausschließen, um Fredholmeigenschaften verifizieren zu können.

(2.8) Der Gewichtsparameter $\mu \in \mathbb{R}$ heißt *kritisch* [BR: "exceptional"], falls $\mu \in \mathbb{Z} \sim \{-1,-2,\ldots,3-n\}$. Für $\mu \in \mathbb{R}$ setzen wir $k(\mu) = \max\{k \mid k \text{ kritisch}, k < \mu\}$.

Die kritischen Parameter entsprechen also dem Wachstum homogener, harmonischer Funktionen auf $\mathbb{R}^n \sim \{0\}$. Der folgende Satz stellt die für uns wesentlichen Existenzresultate für den konformen Laplaceoperator zusammen.

2.9 Satz.

Sei g asymptotisch flach von der Ordnung $\tau > 0$ mit einem $q > n$. Sei $1 < r \leq q$, und $\mu \in \mathbb{R}$ nichtkritisch. Dann gilt:

(1) $\Delta_g\colon W^{2,r}_{\mu} \longrightarrow W^{0,r}_{\mu-2}$ ist ein Fredholmoperator. Die Dimension seines Kerns ist

$$\dim \ker \Delta_g = \sum_{i=0}^{k(\mu)} n_i \qquad (= 0 \text{ falls } \mu \leq 0) .$$

Dabei bezeichnet n_i die Dimension des Raumes harmonischer Polynome, die homogen vom Grad i sind.

(2) Δ_g ist beschränkt invertierbar für $2 - n < \mu < 0$.

(3) $L_g\colon W^{2,r}_{\mu} \longrightarrow W^{0,r}_{\mu-2}$ ist Fredholmsch und hat denselben Index wie Δ_g.

(4) Sei $2 - n < \mu < 0$. Falls $\ker\left[L_g\colon W^{2,q}_{2-n-\mu} \longrightarrow W^{0,q}_{-n-\mu}\right] = \{0\}$, so ist $L_g\colon W^{2,q}_{\mu} \longrightarrow W^{0,q}_{\mu-2}$ surjektiv. Ist der letzte Operator zusätzlich injektiv, so ist er beschränkt invertierbar.

Beweis: Alle Aussagen sowie eine Auflistung der Beiträge der verschiedenen Autoren zu diesem Satz entnimmt man der Arbeit von Bartnik [BR]. Im einzelnen sind (1)

und (2) die Aussage von [BR; 2.2], wobei die Beschränktheit der Inversen aus der Argumentation von [BR; 1.10] folgt. (3) und (4) ergeben sich aus [BR; 2.3] zusammen mit [BR; S. 672 unten]. Dort wird begründet, daß

$$\dim \operatorname{coker}\left(L_g\big|_{W^{2,r}_{\mu}}\right) = \dim \ker \left(L_g\big|_{W^{2,q}_{2-n-\mu}}\right) . \qquad \blacksquare$$

Nachdem wir jetzt Lösbarkeitskriterien für Gleichungen des Typs $L_g u = f$ zur Verfügung haben, interessieren wir uns für die Regularität dieser Lösungen. Da sich die lokale Regularität aus der elliptischen Theorie unmittelbar ergibt und wohlbekannt ist, ist der Begriff der Regularität hier im Sinne der Existenz einer *asymptotischen Entwicklung einer Lösung* um ∞ zu interpretieren. Es war schon im 19. Jahrhundert bekannt, daß eine auf $\mathbb{R}^n \sim \{0\}$ harmonische Funktion durch eine "Laurentreihe" homogener harmonischer Funktionen dargestellt werden kann [MN; S. 247] . Eine entsprechende Aussage, formuliert in der Kategorie der gewichteten Sobolevräume, ist der folgende, von Bartnik [BR; 1.17] angegebene Satz:

2.10 Satz.

Sei g asymptotisch flach von der Ordnung $\tau > 0$ mit einem $q > n$.

Sei $\mu \in \mathbb{R}$, so daß mit $k = k(\mu)$ der Parameter $k - \tau$ nicht kritisch ist.

Sei $\gamma \in \mathbb{R}$ nichtkritisch, und $f \in W^{0,q}_{\gamma-2}$.

Sei $u \in W^{2,q}_{\mu}$ eine Lösung von $L_g u = f$.

Dann existiert eine Δ_δ-harmonische Funktion $h = \mathcal{O}(|x|^k)$ (auf $\mathbb{R}^n \sim \{0\}$ definiert), so daß gilt:

$$u - h \in W^{2,q}_{\omega} \quad \text{mit} \quad \omega = \max\{\gamma, k-\tau\} .$$

Eine solche Aussage gilt natürlich für jeden Differentialoperator, der asymptotisch zum euklidischen Laplaceoperator ist. Da die von Bartnik gegebene Argumentation etwas unsauber ist, führen wir den Beweis des Satzes vor:

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $f \equiv 0$ auf E_R. Sei h_k eine harmonische Funktion mit $h_k = \mathcal{O}(r^k)$. Dann gilt für $k \leq \alpha \leq \mu$, $\alpha - \tau$ nichtkritisch, folgender *Iterationsschritt*:

$$u - h_k \in W^{2,q}_{\alpha}(E_R) \Rightarrow u - \tilde{h}_k \in W^{2,q}_{\alpha-\tau}(E_R) \quad \text{für ein} \quad \tilde{h}_k \ .$$

Beweis davon:

Setze $L_g = a\Delta_\delta + F$. Es ergibt sich

$$L_g h_k = F h_k \in W^{0,q}_{k-2-\tau}(E_R)$$

$$\Rightarrow \quad L_g(u-h_k) \in W^{0,q}_{k-2-\tau}(E_R)$$

$$\Rightarrow \quad a\Delta_\delta(u-h_k) = (L_g - F)(u-h_k) \in W^{0,q}_{k-2-\tau}(E_R) + W^{0,q}_{\alpha-2-\tau}(E_R) \ .$$

Da $\Delta_\delta : W^{2,q}_{\alpha-\tau}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{0,q}_{\alpha-2-\tau}(\mathbb{R}^n)$ Fredholmsch ist, existiert also ein $v \in W^{2,q}_{\alpha-\tau}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\Delta_\delta u = \Delta_\delta(u-h_k) = \Delta_\delta v \text{ auf } E_R$$

$$\Rightarrow \quad u - h_k - v \text{ ist harmonisch auf } E_R \text{, und } u - h_k - v \in W^{2,q}_{\alpha}(E_R)$$

$$\Rightarrow \quad u - h_k - v = \tilde{h}_k \text{ für ein geeignetes } \tilde{h}_k \text{ aufgrund der Kenntnis der harmonischen Funktionen}$$

$$\Rightarrow \quad u - (h_k + \tilde{h}_k) = v \in W^{2,q}_{\alpha-\tau}(E_R) \ .$$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{ \alpha \in \mathbb{R} \mid k \leq \alpha \leq \mu, \ \exists h_k \text{ mit } u - h_k \in W^{2,q}_{\alpha}(E_R) \right\} \ .$$

Nach Voraussetzung gilt $\mu \in \mathcal{M}$, nämlich mit $h_k \equiv 0$. Andererseits zeigt der Iterationsschritt:

$$\alpha \in \mathcal{M} \Rightarrow \beta \in \mathcal{M} \quad \forall \beta \geq k \ , \beta > \alpha - \tau \ .$$

Hieraus folgt $k \in \mathcal{M}$, und wir können den Iterationsschritt mit $\alpha = k$ verwenden und erhalten

$$u - h_k \in W^{2,q}_{k-\gamma}(E_R) \quad .$$

Sei nun f wie in der Behauptung. Da nach (2.9.3) $L_g: W^{2,q}_{\gamma} \longrightarrow W^{0,q}_{\gamma-2}$ Fredholmsch ist, existiert ein $v \in W^{2,q}_{\gamma}$ mit $L_g v = f$ auf E_R, also

$$L_g(u-v) = 0 \quad \text{auf} \quad E_R \quad .$$

Wende nun auf $u - v$ obigen Fall an. ∎

Im Rest dieses Kapitels behandeln wir Aussagen über asymptotische Entwicklungen in den gewichteten Hölderräumen. Die relevanten Ergebnisse findet man in der Arbeit von Meyers [MN]. Ausnahmsweise lassen wir für die folgenden drei Resultate auch den Fall $n = 2$ zu. Sei P wieder ein linearer, elliptischer Differentialoperator mit Koeffizienten a^{ij}, b^i und c, der auf Funktionen $u: E^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ operiert. Die folgende Aussage präzisiert das Prinzip, das das Wachstum einer Lösung der Gleichung $Pu = f$ auch das Wachstum der Ableitungen der Lösung bestimmt.

2.11 Satz.

Sei u eine Lösung von $Pu = f$ auf E_1. Es möge gelten:

(1) $\|a^{ij}\|_{C^{k,\alpha}_{\delta}} + \|b^i\|_{C^{k,\alpha}_{\delta-1}} + \|c\|_{C^{k,\alpha}_{\delta-2}} \leq \Lambda$ für ein $\alpha \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}_0$ und alle i, j.

(2) $a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in E_1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit einem $\lambda > 0$.

Dann existiert eine Konstante $C = C(\lambda,\Lambda,k,\alpha,n,\mu)$ mit folgender Eigenschaft:

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}_{\mu}(E_{2R})} \leq C\left(\|u\|_{C^{0}_{\mu}(E_R)} + \|f\|_{C^{k,\alpha}_{\mu-2}(E_R)}\right)$$

für alle $R > 1$.

Beweis: Der Satz entspricht [MN; Theorem 1], wobei als Gewichtsfunktion die Funktion r^{μ} gewählt wurde.

2.12 Korollar.

Unter den Voraussetzungen von 2.11 gilt:

Falls $u = \mathcal{O}(r^{\mu})$, $\|f\|_{C^{k,\alpha}_{\mu-2}(E_R)} = \mathcal{O}(1)$ (für $R \to \infty$) , so folgt:

$$\partial^i u = \mathcal{O}(r^{\mu-i}) \quad \text{für} \quad i \leq k+2 \quad .$$

Satz 2.11 folgt aus den inneren Schauderabschätzungen durch Skalierung. Für das folgende Resultat benötigt man eine genaue Kenntnis der Potentialdarstellung einer Lösung der Poissongleichung.

2.13 Satz.

Sei $n \geq 2$, $Pu = f$ auf E_1 , und u sei beschränkt. Die folgenden Normen auf E_1 seien endlich:

(1) $\|a^{ij} - \delta_{ij}\|_{C^{k,\alpha}_{-\varepsilon}} < \infty$

(2) $\|b^i\|_{C^{k,\alpha}_{-\varepsilon-1}} < \infty$

(3) $\|c\|_{C^{k,\alpha}_{-\varepsilon-n}} < \infty$

(4) $\|f\|_{C^{k,\alpha}_{-\varepsilon-n}} < \infty$.

Dabei sei $0 < \epsilon < 1$.

Dann existieren Konstanten $h_{\infty} \in \mathbb{R}$, $c_{\infty} \in \mathbb{R}$, mit folgender Eigenschaft:

Fall 1 $n = 2$

$$u(x) = h_{\infty} + C^{k+2,\alpha}_{-\varepsilon}(E_1) \quad .$$

Fall 2 $n \geq 3$

$$u(x) = h_\infty + \frac{c_\infty}{|x|^{n-2}} + C^{k+2,\alpha}_{2-n-\epsilon}(E_1) \ .$$

Beweis: Der Satz ist ein Spezialfall von [MN; Corollary 2]. Die dortigen Parameter sind wie folgt zu wählen: $i \hat{=} k$, $\alpha \hat{=} \alpha$, $\epsilon \hat{=} \epsilon$, $N \hat{=} 0$. Das Nichtauftreten des logarithmischen Terms im Fall $n = 2$ folgt aus der von uns gemachten Annahme der Beschränktheit von u .

3. Die Energie einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit

(3.1) Sei M^n, $n \geq 3$, eine Mannigfaltigkeit mit einer Struktur ϕ bei ∞. Eine glatte Metrik g genügt der *Energiebedingung* bzgl. ϕ, falls gilt:

(1) g ist asymptotisch flach von einer Ordnung $\tau > \frac{n-2}{2}$ mit einem $q > n$ (vgl. (2.3)).

(2) $S_g \in L^1(M)$.

Für die Integrierbarkeit der Skalarkrümmung ist es unwesentlich, ob diese bzgl. des "euklidischen" Volumenelements dx oder des Volumenelements dv von g aufgefaßt wird.

(3.2) Sei M^n, $n \geq 3$, eine Mannigfaltigkeit mit einer festen Struktur $\phi = (M_\infty, x)$ bei ∞, und g eine Metrik, die der Energiebedingung genügt. Dann definieren wir die *Energie von* g *bzgl.* ϕ durch

$$E(g,\phi) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{R\to\infty} \int_{\{x\,|\,|x|=R\}} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\, N^j \, d\chi^{n-1} \quad .$$

Dabei gilt die Summationsvereinbarung, g_{ij} sind die Koeffizienten von g bzgl. $x = (x^1,\ldots,x^n)$, N ist die äußere euklidische Normale an $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, und χ^{n-1} ist das $n-1$-dimensionale euklidische Maß.

Der Grund für die Einschränkung des Parameters τ in (3.1) bzw. (3.2) ist die folgende Aussage, die von Physikern als selbstverständlich angesehen wird, aber von Bartnik erstmals bewiesen wurde [BR; Theorem 4.2]:

(3.3) Satz.

Seien ϕ, ψ Strukturen bei ∞ für die Mannigfaltigkeit M und g eine Riemannsche Metrik auf M, so daß g bzgl. ϕ *und* ψ der Energiebedingung ge-

nügt (mit evtl. verschiedenen Parametern). Dann gilt:

$$E(g,\phi) = E(g,\psi) \in \mathbb{R} \quad .$$

In diesem Sinne ist die Energie eine *Riemannsche Invariante.*

Bemerkung:

Nach [BR; S. 682] sind die Voraussetzungen (3.1) für die Wohldefiniertheit der Energie in obigem Sinne nahezu optimal. Lediglich der Grenzfall $\tau = \frac{n-2}{2}$ wäre noch zulässig. Der Satz erlaubt es uns, ab jetzt mit einer festen Struktur ϕ bei ∞ zu arbeiten und die Energie als Funktional auf der Menge aller Metriken zu betrachten, die der Energiebedingung (bzgl. ϕ) genügen. Insbesondere schreiben wir $E(g,\phi) =: E(g)$.

(3.4) Lemma.

Seien $g^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, g Metriken auf M , die der Energiebedingung mit *einem* $\tau > \frac{n-2}{2}$, $q > n$ genügen. Es gelte:

$$\|g-g^{(k)}\|_{2,q,\tau} \to 0 \quad , \quad \|S-S^{(k)}\|_{L^1} \to 0 \quad .$$

Dann folgt:

$$E(g^{(k)}) \to E(g) \quad \text{mit} \quad k \to \infty \quad .$$

E ist also ein *stetiges, affines Funktional* auf der Menge

$$\{g \mid g - \delta \in W^{2,q}_{-\tau} \, , \, S_g \in L^1\}$$

mit der induzierten Topologie (vgl. [LP; 9.4]).

Beweis: Wir folgen der Argumentation von [LP; 9.4] bzw. [BR; § 4]. In den asymptotischen Koordinaten gilt für die Skalarkrümmung der Metrik g :

$$S_g = g^{jk}\left(\partial_i\Gamma^i_{jk} - \partial_k\Gamma^i_{ij} + \Gamma^i_{il}\Gamma^l_{jk} - \Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{ij}\right) .$$

Setze $g^{jk} = \delta^{jk} + h^{jk}$. Es gilt:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{kl}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$
$$= \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} + h\cdot\partial g \quad .$$

Es folgt:

$$S_g = \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_i\partial_i g_{jj} + \partial h\cdot\partial g + h\cdot\partial^2 g$$
$$+ \Gamma\cdot\Gamma + h\cdot\partial h\cdot\partial g + h\cdot h\cdot\partial^2 g - h\cdot\Gamma\cdot\Gamma \quad .$$

Beachte nun, daß wegen Lemma (2.4) gilt: $h \in W^{2,q}_{-\tau}$, $\Gamma \in W^{1,q}_{-\tau-1}$. Wegen (2.1.7), (2.1.4) und (2.1.5) ergibt sich:

$$S_g = \partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_i\partial_i g_{jj} + H \quad , \quad H \in L^1_{2\tau-2} \quad .$$

Sei nun η eine glatte Abschneidefunktion mit $\operatorname{spt}\eta \subset M_\infty$ und $\eta \equiv 1$ für große $|x|$. Dann folgt:

$$\omega_n E(g) = \lim_{R\to\infty} \int_{|x|=R} \eta\left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right) N^j \, d\chi^{n-1}$$
$$= \lim_{R\to\infty} \int_{M_R} \left\{\eta\left(\partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii}\right) + \left(\partial_j\eta\right)\left(\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}\right)\right\} dx \quad .$$

Beachte nun, daß nach Voraussetzung

$$\partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii} = S_g - H \in L^1(M)$$

wegen $2\tau + 2 > n$ und (2.1.1). Hieraus ersehen wir zunächst, daß die Energie von g endlich ist. Weiter liefert der Zusatz von Lemma 2.4:

$$h^{(k)} \longrightarrow h \quad \text{in} \quad W^{2,q}_{\tau}$$

$$\Gamma^{(k)} \longrightarrow \Gamma \quad \text{in} \quad W^{1,q_1}_{\tau}$$

$$\partial^2 g^{(k)} \longrightarrow \partial^2 g \quad \text{in} \quad L^{q}_{\tau-2} \quad \text{(nach Voraussetzung)} .$$

Abermals wegen (2.1.7), (2.1.4) und (2.1.5) ist dann

$$H^{(k)} \longrightarrow H \quad \text{in} \quad L^{q}_{2\tau-2}$$

$$\overset{(2.1.1)}{\Rightarrow} \quad H^{(k)} \longrightarrow H \quad \text{in} \quad L^1$$

$$\Rightarrow \quad \|(\partial_i\partial_j g^{(k)}_{ij} - \partial_j\partial_j g^{(k)}_{ii}) - (\partial_i\partial_j g_{ij} - \partial_j\partial_j g_{ii})\|_{L^1}$$

$$\leq \|S - S^{(k)}\|_{L^1} + \|H - H^{(k)}\|_{L^1} \longrightarrow 0 .$$

Da außerdem wegen (2.1.4)

$$\|(\partial_i g^{(k)}_{ij} - \partial_j g^{(k)}_{ii}) - (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii})\|_{C^{1,\alpha}_{\tau-1}} \longrightarrow 0$$

erhalten wir $E(g^{(k)}) - E(g)$ aus obiger Darstellung. ∎

Neben physikalischen Interpretationen der Energie [ADM], [WE] haben wir auch folgende geometrische Motivation für die Definition (3.2):

(3.5) Satz.

Sei g_t, $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, eine Schar von Metriken, die der Energiebedingung mit gemeinsamen τ, q genügen. g_t sei bzgl. der Topologie aus (3.4) differenzierbar mit $\frac{d}{dt} g_t\big|_{t=0} = h$. Dann gilt:

$$\frac{d}{dt} E(g_t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_M S_t \, dv_t\right)\Big|_{t=0} + \int_M \langle Ric - \tfrac{1}{2} Sg, h\rangle \, dv .$$

Die Energie kann also infinitesimal als *Randterm in der Variation des Skalarkrümmungsfunktionals* aufgefaßt werden.

Beweis: siehe [LP; 8.11].

Aus Satz (3.5) folgt, daß die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ein stationärer Punkt des Energiefunktionals unter allen Metriken ist, die der Energiebedingung genügen und nichtnegative Skalarkrümmung haben. Tatsächlich ist die euklidische unter diesen Metriken sogar stabil, das heißt

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} E(g_t) \geq 0 \quad \text{(für obige Schar)} .$$

Einen Beweis (in Dimension 3) findet man z.B. in [BJ; 3.4-3.9]. Wir formulieren nun die von uns zu beweisende Version des Positive Energy Theorem.

(3.6) Satz. (*Positive Energy Theorem*)

Sei M eine differenzierbare, orientierte Mannigfaltigkeit mit $3 \leq \dim M \leq 7$. M besitze eine Struktur bei ∞ (2.1). Sei g eine glatte Metrik auf M, die der Energiebedingung (3.1) genügt. Die Skalarkrümmung von g sei nichtnegativ. Dann gilt:

(1) $E(g) \geq 0$

(2) $E(g) = 0$

$\Rightarrow$ (M,g) ist isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

(3.7) Bemerkungen.

(1) Allgemeiner könnten wir in den Voraussetzungen von 3.6 annehmen, daß M *mehrere Enden* $M_\infty^{(1)},\ldots,M_\infty^{(k)}$ besitzt. Jedem Ende ist dann eine Energie $E^{(1)},\ldots,E^{(k)}$ zugeordnet. Die Aussage des Satzes ist dann: $E^{(i)} \geq 0$ für $1 \leq i \leq k$, und falls $E^{(i)} = 0$ für ein i, so ist $k = 1$ und (M,g) isometrisch zu $\mathbb{R}^n$. Der von uns gegebene Beweis läßt sich leicht auf diesen Fall ausdehnen, indem man die Enden $M_\infty^{(2)},\ldots,M_\infty^{(k)}$ so abschneidet, daß die mittlere Krümmung der entstehenden Ränder bzgl. der äußeren Norma-

len strikt positiv ist. Insbesondere stellt die Orientierbarkeit von M keine wesentliche Voraussetzung für den Satz dar, da die *Orientierungsüberlagerung* von M zwei Enden besitzt.

(2) Falls die zweite Stiefel-Whitney-Klasse von M verschwindet, wurde ein einfacher Beweis des Satzes von Witten im Fall dim M = 3 [WE] und von Bartnik im Fall dim M $\geq$ 3 [BR; § 6] gegeben.

(3) Der schwierigere Teil des Beweises bezieht sich auf die Behauptung (3.6.1). Er nimmt die Abschnitte (3.8), (3.9) sowie (4.1) - (4.5) in Anspruch. Die Eindeutigkeitsaussage ergibt sich dann relativ leicht in (4.6).

(3.8) Lemma.

Sei g eine Metrik, die der Energiebedingung genügt, und für die gilt:

$$g = \varphi^{p-2}\delta \quad \text{mit} \quad \varphi = 1 + \frac{A}{|x|^{n-2}} + W^{2,q}_{2-n-\epsilon} \quad \text{für ein } \epsilon > 0 \text{ und } A \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$E(g) = 4(n-1)A \quad .$$

Beweis: Wegen Lemma (2.2) gilt:

$$\left(1 + \frac{A}{|x|^{n-2}} + W^{2,q}_{2-n-\epsilon}\right)^{p-2} = \left(1 + \frac{A}{|x|^{n-2}}\right)^{p-2} \cdot \left(1 + W^{2,q}_{2-n-\epsilon}\right)$$

$$= 1 + \frac{(p-2)A}{|x|^{n-2}} + W^{2,q}_{2-n-\epsilon} \quad .$$

Wir berechnen:

$$\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii} = \frac{4(n-1)A}{|x|^{n-1}} N_j + W^{1,q}_{1-n-\epsilon} \quad .$$

Da nach (2.1.4) $W^{1,q}_{1-n-\epsilon} \subset C^{0,\alpha}_{1-n-\epsilon} = \mathcal{O}(|x|^{1-n-\epsilon})$, trägt dieser Term nichts zum Energieintegral bei und

$$E(g) = \frac{1}{\omega_n} \lim_{R\to\infty} \int_{|x|=R} \frac{4(n-1)A}{R^{n-1}} (Nj)^2 \, d\chi^{n-1} = 4(n-1)\,A \quad . \qquad \blacksquare$$

Wird also der Unterschied der Metrik g zur euklidischen Metrik in erster Ordnung durch ein Vielfaches des Newtonpotentials bestimmt, so impliziert eine Voraussetzung an das Vorzeichen von E, *daß wir das Riemannsche Hyperflächenmaß mit dem euklidischen Hyperflächenmaß vergleichen* können. Aus diesem Grund streben wir als erstes eine solche Vereinfachung an.

(3.9) Lemma. (*Vereinfachung der Metrik*)

Sei g eine Metrik mit nichtnegativer Skalarkrümmung, die der Energiebedingung genügt. Zu $\epsilon > 0$ existiert dann eine glatte Metrik $\tilde{g}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\tilde{g}(x) = \varphi(x)^{p-2}\,\delta(x)$ für alle x mit $|x|$ genügend groß, wobei gilt:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{A}{|x|^{n-2}} + C^{\infty}_{1-n}(M_{\infty}) \quad .$$

(2) Die Skalarkrümmung von $\tilde{g}$ ist strikt positiv: $\tilde{S} > 0$.

(3) $4(n-1)A = E(\tilde{g}) \leq E(g) + \epsilon$.

Beweis: Wir folgen im wesentlichen dem Argument von [LP; 10.6] .

Schritt 1 *Konstruktion einer Metrik mit (1), (3) und nichtnegativer Skalarkrümmung*

Sei dazu $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{cases} 0 \leq \eta(t) \leq 1 \;;\; \eta'(t) \leq 0 & \text{für alle } t \\ \eta(t) = 1 \text{ für } t \leq 1 \;,\; \eta(t) = 0 \text{ für } t \geq 2 \end{cases} .$$

Definiere auf M die Abschneidefunktion

$$\eta_R(x) = \eta\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad (R \text{ genügend groß}) \; .$$

Es folgt:

$$\text{(i)} \qquad \|\eta_R\|_{C^k_\delta} \leq C \ , \ \operatorname{spt}(\partial\eta_R) \subset A_R \ .$$

Dabei hängt die Konstante C *nicht* von R ab. Nun interpolieren wir g und die euklidische Metrik δ:

$$g_R = \eta_R g + (1-\eta_R)\,\delta \ .$$

Zur Metrik g_R assoziierte Größen indizieren wir mit R, z.B.

$$L_R = a\Delta_R + S_R \ .$$

Wir wollen folgende Gleichung lösen:

$$L_R u_R = \eta_R S u_R \quad \text{mit} \quad u_R > 0 \ .$$

Zumindest hat dann die Metrik $\tilde{g}_R = u_R^{p-2} g$ nach (1.1.11) die Skalarkrümmung

$$\tilde{S}_R = u_R^{2-p}\,\eta_R S \geq 0 \ .$$

Wir machen den Ansatz $u_R = 1 + \psi_R$, so daß wir mit $\gamma_R := S_R - \eta_R S$ folgendes Problem erhalten:

$$\text{(ii)} \qquad P_R\psi_R := \left(a\Delta_R + \gamma_R\right)\psi_R \stackrel{!}{=} -\gamma_R \ .$$

Sei nun $\frac{n-2}{2} < \mu < \tau$. Nach Satz (2.9.2) wissen wir, daß $a\Delta_g\colon W^{2,q}_{-\mu} \longrightarrow W^{0,q}_{-\mu-2}$ beschränkt invertierbar ist, wenn wir zusätzlich $\mu < n-2$ annehmen. Es reicht also für (ii) aus zu zeigen:

$$\text{(iii)} \qquad \gamma_R \in W^{0,q}_{-\mu-2}$$

$$\text{(iv)} \qquad P_R \longrightarrow a\Delta_g \text{ in der Operatornorm bei } R \to \infty \ .$$

Dann ist nämlich für $R >> 1$ auch P_R beschränkt invertierbar [AHW; 3.5]. Zunächst beachten wir, daß wegen (i) und (2.1.3) gilt:

$$\begin{aligned}\|g-g_R\|_{2,q,\tau} &= \|(1-\eta_R)(g-\delta)\|_{2,q,\tau} \\ &\leq C\|1-\eta_R\|_{C^2_\delta}\,\|g-\delta\|_{2,q,\tau} \\ &\leq C \quad \text{(unabhängig von } R\text{)} \ .\end{aligned}$$

Da $\mathrm{spt}(g-g_R) \subset E_R$, folgt hieraus wegen $\mu < \tau$

$$\text{(v)} \qquad \|g-g_R\|_{2,q,\tau\mu} \to 0 \quad \text{mit} \quad R \to \infty \ .$$

Mit dem Zusatz von Lemma (2.4.5) folgt $S_R \to S$ in $W^{0,q}_{\tau\mu-2}$. Andererseits haben wir (2.1.5):

$$\|(1-\eta_R)S\|_{q,\tau-2} \leq \|1-\eta_R\|_{C^2_\delta}\,\|S\|_{L^q_{\tau-2}(E_R)}$$

Insgesamt folgt:

$$\text{(vi)} \qquad \|\gamma_R\|_{q,\tau\mu-2} \to 0 \quad \text{mit} \quad R \to 0 \ .$$

Jetzt überlegen wir uns (iv). Sei $u \in W^{2,q}_{\tau\mu}$. Dann gilt wegen (2.1.5), (2.1.4):

$$\begin{aligned}\|\gamma_R u\|_{q,\tau\mu-2} &\leq \|\gamma_R\|_{q,-2}\,\|u\|_{C^0_{\tau\mu}} \\ &\leq C\,\|\gamma_R\|_{q,-2}\,\|u\|_{2,q,\tau\mu} \ .\end{aligned}$$

Mit ähnlichen Argumenten (Satz 2.1, Lemma 2.4) sehen wir

$$\|\Delta_g u-\Delta_R u\|_{q,\tau\mu-2} \leq C\left(\|g-g_R\|_{2,q,\tau\mu}\right)\|u\|_{2,q,\tau\mu} \ ,$$

wobei die Konstante mit $R \to \infty$ gegen Null geht. Damit ist (iv) gezeigt, und wir haben für $R >> 1$ eine Lösung $\psi_R \in W^{2,q}_{\tau\mu}$ von (ii), für die außerdem gilt:

$$\|\psi_R\|_{2,q,\tau\mu} \to 0 \quad \text{mit} \quad R \to \infty \ .$$

Insbesondere ist wegen (2.1.4) $u_R = 1 + \psi_R > 0$ für ausreichend großes R. Nun ist $\gamma_R \equiv 0$ und $\Delta_R = \Delta_\delta$ auf E_{2R}, also ist ψ_R auf E_{2R} eine (euklidisch-)

harmonische Funktion. Hieraus folgt die behauptete Entwicklung (3.9.1). Weiter beachten wir:

$$g - \tilde{g}_R = g - g_R + \left(1 - (1+\psi_R)^{p-2}\right) g_R \quad .$$

Nach (2.2.3) gilt aber

$$1 - (1+\psi_R)^{p-2} \to 0 \quad \text{in} \quad W^{2,q}_{-\mu}$$

und somit wegen (v) $\tilde{g}_R \to g$ in $W^{2,q}_{-\mu}$. Jetzt beachten wir noch

$$\begin{aligned} |S-\tilde{S}_R| &= |S-u_R^{2-p}\,\eta_R\, S| \\ &\le |S-\eta_R\, S| + |1-u_R^{2-p}|\,|S| \\ \Rightarrow \int_M |S-\tilde{S}_R|\,dx &\le \int_{E_R} |S|\,dx + \left(\sup_{x\in M} |1-u_R^{2-p}|\right) \int_M |S|\,dx \quad . \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $S \in L^1$, folgt nun aus Lemma (3.4)

$$E(\tilde{g}_R) \to E(g) \quad \text{mit} \quad R \to \infty \quad .$$

Schritt 2.

Wir nehmen jetzt an, daß $h = \tilde{g}_R$ die in Schritt 1 konstruierten Eigenschaften besitzt. Wir wollen (3.9.2) wieder durch einen konformen Rückwechsel erreichen. Dazu betrachten wir den Operator

$$L_h: \underset{\frac{3}{2}-n}{W^{2,q}} \to \underset{-\frac{1}{2}-n}{W^{0,q}} \quad .$$

Nach Satz (2.9.3) ist L_h Fredholmsch. Wir können eine schnell fallende, strikt positive Funktion f sowie ein $\psi \in \underset{\frac{3}{2}-n}{W^{2,q}}$ bestimmen, so daß

$$L_h \psi = f - S_h$$

(beachte $S_h \equiv 0$ für genügend große $|x|$).

Auf ψ wenden wir Satz (2.10) an, und zwar mit $\mu = \frac{3}{2} - n$, $k(\mu) = 1-n$, sowie geeignetem $\tau > 0$. Es existiert eine harmonische Funktion H , so daß

$$\psi - H \in W^2_{1-n}(M_\infty) \quad .$$

Aufgrund des Wachstums von ψ selbst folgt $\psi \in C^0_{1-n}$. Da wir für alle Ableitungen der Koeffizienten von L_h die entsprechenden Abklingbedingungen haben, folgt aus Satz (2.11) $\psi \in C^\infty_{1-n}$.

Setze $u = 1 + \psi$. Dann ist nach Konstruktion $L_h u = f > 0$ und insbesondere u nicht konstant. Aufgrund des Maximumprinzips [GT; 3.5] kann u kein nichtpositives Minimum annehmen, ist also wegen $u(\infty) = 1$ strikt positiv. Wähle jetzt

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= u^{p-2} h \\
\Rightarrow \qquad \tilde{S} &= u^{1-p} L_h u = u^{1-p} f > 0 \\
\tilde{g} &= (1+\psi)^{p-2} (1+\psi_R)^{p-2} \delta \\
&\overset{(3.8)}{=} \left(1 + C^\infty_{1-n}\right)^{p-2} \left(1 + \frac{E(h)}{4(n-1)|x|^{n-2}} + C^\infty_{1-n}\right)^{p-2} \delta \\
&\overset{(2.2.2)}{=} \left(1 + \frac{E(h)}{4(n-1)|x|^{n-2}} + C^\infty_{1-n}\right)^{p-2} \delta \quad .
\end{aligned}$$

Damit gelten für $\tilde{g}$ die Aussagen (3.9.1), (3.9.2) und mit (3.8) erhalten wir

$$E(\tilde{g}) = E(h) \leq E(g) + \epsilon \quad . \qquad \blacksquare$$

<u>Bemerkungen:</u>

a) Tatsächlich wurde der Beweis des Positive Energy Theorem von Schoen und Yau zuerst für Metriken des Typs

$$g = \left(1 + \frac{A}{|x|}\right) \delta + C^2_{-2}$$

im Fall $n = 3$ formuliert [SY1]. Eine erste Ausdehnung führten Schoen und Yau in [SY2] durch.

b) Die für den Beweis von (3.6.1) wesentliche Vereinfachung der Metrik besteht in der Tatsache, daß die Energie von $\tilde{g}$ in der Entwicklung von $\tilde{g}$ an einer entscheidenden Stelle auftritt. Die konform flache Struktur von $\tilde{g}$ ist zwar nicht wesentlich, vereinfacht aber in erheblichem Ausmaß die Berechnung der Geometrie von M_∞. Die strikte Positivität der Skalarkrümmung ist rein beweistechnischer Natur; sie wird in (4.4.5) benutzt.

c) Unter der etwas stärkeren Voraussetzung $S_g \in W^0_{-q,\eta_\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) läßt sich mit ähnlichen Methoden wie denen aus (3.8) eine Metrik $\tilde{g}$ konstruieren, die ebenfalls der Energiebedingung genügt, und für die gilt [SR; 4.1]:

$$\tilde{S} \equiv 0 \quad , \quad E(\tilde{g}) \leq E(g) \ .$$

Diese Metrik stellt also in ihrer Konformklasse unter den Zusatzbedingungen "asymptotisch flach" und "Skalarkrümmung nicht negativ" ein Minimum für die Energie dar.

4. Beweis des Positive Energy Theorem

Wir beginnen jetzt mit dem Kernstück des Beweises von Satz (3.6.1). Wegen Lemma (3.8) und (3.9) genügt es, in der jeweiligen Dimension folgende Version einzusehen.

(4.0.1) **Satz.**

Sei M^n $(3 \leq n \leq 7)$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit einer Struktur bei ∞ (2.1). Sei g eine glatte Metrik auf M mit folgenden Eigenschaften:

(1) $g(x) = \varphi(x)^{p-2}\,\delta(x)$ für $x \in M_\infty = \{x \in M \mid |x| \geq R_0\}$. Dabei ist δ die euklidische Metrik.

(2) Es existieren ein $A \in \mathbb{R}$ und $h \in C^3_{1-n}(M_\infty)$ mit $\varphi = 1 + \frac{A}{|x|^{n-2}} + h$ $(c_1 := \|h\|_{C^3_{1-n}(M_\infty)})$.

(3) $S_g > 0$.

Dann folgt $A \geq 0$.

(4.0.2) *Skizze des Beweises:*

Der Beweis von (4.0.1) bzw. (3.6.1) nimmt die Abschnitte (4.1) - (4.5) in Anspruch. Er beruht auf einer *Induktion über* $n = \dim M$, wobei sowohl der Induktionsanfang als auch der Induktionsschritt *durch Widerspruch* gezeigt werden. Im einzelnen kann man den Beweis wie folgt gliedern:

- *indirekte Annahme*: $A < 0$ (4.0.3.1)

- Sei $S(\sigma,h) = \{x \in M \mid |(x^1,\ldots,x^{n-1})| = \sigma,\ x^n = h\}$. Mit den Methoden der geometrischen Maßtheorie erhalten wir eingebettete Lösungen des *Plateauproblems*

  $\mathrm{vol}(\Sigma) \longrightarrow$ Minimum unter allen Σ mit $\partial\Sigma = S(\sigma,h)$ ((4.1.1) - (4.1.2))

- *Wegen* $A < 0$ existiert zu festem σ ein h_σ, so daß $\Sigma(\sigma,h_\sigma)$ bei variierendem h kleinsten Flächeninhalt besitzt. Ferner können wir eine *von* σ *unabhängige Schranke* h_0 angeben, so daß $\Sigma(\sigma,h_\sigma) \subset \{x \in M \mid |x^n| \leq h_0\}$. Beides ist möglich, *weil das Riemannsche Hyperflächenelement bei* $|x| \longrightarrow \infty$ *wächst* (vgl. (3.8)). ((4.1.3) - (4.1.4))

- Die Höhenschranke erlaubt die *Konstruktion einer Grenzfläche* $\Sigma(\sigma,h_\sigma) \longrightarrow \Sigma$. Ferner gelingt die Angabe gleichmäßiger *Volumenschranken* für $\Sigma(\sigma,h_\sigma)$. ((4.1.6) - (4.1.9))

- Die Höhen- und Volumenschranken reichen aus, um aus der Regularitätstheorie die *Darstellbarkeit der* $\Sigma(\sigma,h_\sigma),\Sigma$ *als Graphen* über großen Teilen von $\{x^n = 0\}$ zu folgern. (4.2)

- Nun kann die Minimalflächengleichung für die Graphenfunktion von Σ benutzt werden, um mit Hilfe der Aussagen aus Kapitel 2 zu verbesserten *a-priori-Abschätzungen* zu kommen. (4.3)

- Die Abschätzungen reichen aus, um die *Stabilitätsungleichung* der $\Sigma(\sigma,h_\sigma)$ für *viele Variationen* auf Σ zu übertragen. (4.4)

- Jetzt kann durch *geeignete Wahl einer Variation* ein Widerspruch herbeigeführt werden, und zwar für $n = 3$ zum Satz von Gauß-Bonnet sowie für $4 \leq n \leq 7$ zur induktiven Annahme der Gültigkeit von (3.6.1) in der Hyperflächendimension. (4.5)

(4.0.3) Vereinbarungen.

(1) Im gesamten Kapitel 4 gilt (bis zur Herbeiführung des Widerspruchs) die *indirekte Annahme* $A < 0$.

(2) Wegen (4.0.1.2) dürfen wir (nach evtl. Vergrößerung von R_0) o.b.d.A. annehmen, daß gilt (vgl. (1.1.3)):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} < \varphi(x) < 1 \\ \\ \frac{3}{4}\chi^{n-1} \leq \nu^{n-1} \leq \chi^{n-1} \end{array}\right\} \text{ für } x \in M_\infty \ .$$

(3) Im Verlaufe des Beweises wird es wesentlich sein, daß gewisse Konstanten nur von den Daten aus (4.0.1) - also R_0 , A , $c_1 := \|h\|_{C^3_{1-n}(M_\infty)}$ - und *nicht von einem Parameter* σ *abhängen.* Dies wird durch $c = c(\sigma)$ angezeigt.

(4) In $\mathbb{R}^n$ vereinbaren wir folgende Bezeichnungen:

$\{e_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ (*Koordinatenfelder des* $\mathbb{R}^n$)

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^n = 0\} \tilde{=} \mathbb{R}^{n-1}$ (*Hyperebene*)

p = *Orthogonalprojektion* auf H : $p(x) = \xi(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$

$Z_\sigma = \{x \in \mathbb{R} \mid |\xi(x)| = \sigma\}$ (*Zylinder*)

$S(\sigma,h) = \{x \in Z_\sigma \mid x^n = h\}$ (n-2-*Sphäre*)

$C(\xi,\rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |py-\xi| < \rho\}$ (*Vollzylinder*).

In M betrachten wir die Menge

$$\Omega_\sigma = \{x \in M \mid x \in M \sim M_\infty \text{ oder } |\xi(x)| < \sigma\} \qquad (\partial\Omega_\sigma = Z_\sigma) \ .$$

(5) Bei Verwendung von Begriffen aus der Geometrischen Maßtheorie benutzen wir die Notation von [FH]. Die Begriffe "Radonmaß, rektifizierbar, Strom..." besitzen in der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) ihre natür-

liche Definition. Da die Lösbarkeit des Plateauschen Problems in der Literatur aber nur für eingebettete Mannigfaltigkeiten vorhanden ist [SL], berufen wir uns trotzdem auf den Einbettungssatz von Nash. In diesem Fall gilt etwa

$$\mathcal{D}_k(M) = \{T \in \mathcal{D}_k(\mathbb{R}^m) \mid \operatorname{spt} T \subset M\} \quad (M \subset \mathbb{R}^m) .$$

Ist $\Sigma \subset M$ (n-1)-rektifizierbar, $\theta \in L^1_{loc}(\Sigma,\mathbb{N})$ (bzgl. v^{n-1}) und ξ eine *Orientierung* von Σ - also $\xi(x) \in \Lambda_{n-1}(T_x\Sigma)$ - so ist mit diesen Daten der Strom $\tau(\Sigma,\theta,\xi) = T$ assoziiert. Das *Gewichtsmaß* von T ist $\mu_T = v^{n-1} \llcorner \theta$, und mit $\vec{T} = \xi$ ist $T = \mu_T \wedge \vec{T}$. Wir schreiben f_*T für den *pull-forward* von T unter f. Ist $S \subset M$ eine glatte, orientierte Untermannigfaltigkeit, so gehört zu S der Strom $[S]$. Zur Definition der *Masse* des Stroms T verwenden wir die metrische Norm auf $\mathcal{D}^k(M)$ [SL; 26.5]. Der Begriff *"minimierend"* bezieht sich also auf das Riemannsche Hyperflächenmaß in M.

4.1 Konstruktion minimierender Hyperflächen in M

(4.1.1) Lemma. (*konvexe Hülleneigenschaft*)

Sei $\Omega \subset\subset M$ offen und glatt berandet. Die mittlere Krümmung H von $\partial\Omega$ bzgl. der äußeren Normalen ν sei strikt positiv. Ist dann $T = \mu_T \wedge \vec{T}$ (zu eigenen Randwerten) minimierender (n-1)-Strom mit $\operatorname{spt} T \subset \overline{\Omega}$, und gilt $\operatorname{spt} \partial T \subset\subset \Omega$, so folgt $\operatorname{spt} T \subset\subset \Omega$.

Beweis: Wir zeigen, daß die Projektion auf innere Parallelmengen

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\} \quad \text{für} \quad \varepsilon << 1$$

Massen-verkleinernd wirkt. Setze $r(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$, und $\nu(x) = -\nabla r(x)$ sowie

$$U_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon\} \quad .$$

Es existieren $\varepsilon > 0$, $h > 0$, so daß für $0 \le t \le \varepsilon$ gilt:

(i) $\mathrm{spt}\ \partial T \subset \Omega_\varepsilon$

(ii) Die mittlere Krümmung H_t des Levels $\partial\Omega_t$ bzgl. ν erfüllt $H_t \ge h > 0$.

(iii) ε ist kleiner als der Schnittortabstand von $\partial\Omega$.

Die Projektion auf Ω_ε ist gegeben durch

$$\text{(iv)} \quad p_\varepsilon(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \Omega_\varepsilon \\ \exp_x((r(x)-\varepsilon)\nu(x)) & \text{für } x \in \overline{U}_\varepsilon \end{cases} .$$

p_ε ist lipschitzstetig und auf spt T eigentlich. Betrachte nun allgemeiner

$$E_s(x) := \exp_x(-s\nu(x)) \qquad (0 \le s \le \varepsilon)$$
$$E_s : \partial\Omega \to \partial\Omega_s \ .$$

Wähle eine Orthonormalbasis $\mathcal{A} = \{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ von $T_x(\partial\Omega)$ und setze diese parallel längs der Geodätischen $\exp_x(-s\nu(x)) = \gamma(s)$ fort. Betrachte

$$A(s) = M^{\mathcal{A}(0)}_{\mathcal{A}(s)}(\partial_x E_s) \quad , \quad a(s) = \det A(s) \quad .$$

Es gilt $a(0) = 1$ und [KH; 1.2]

$$a'(s) = -H_s(\gamma(s))\, a(s)$$

(ii) $\Rightarrow$ $(\log a(s))' \le -h$

$\Rightarrow$ $a(s) \le e^{-sh}$ für $0 \le s \le \varepsilon$.

Da E_s orientierungserhaltend ist, folgt:

$$|\Lambda_{n-1}(\partial_x E_s)| \le e^{-\frac{1}{2}sh} \qquad \text{für } x \in \partial\Omega \ .$$

Wenden wir dies statt auf $\partial\Omega$ auf $\partial\Omega_s$ an und beachten $\nu(x) \in \ker(\partial_x p_\varepsilon)$, so folgt für $x \in U_\varepsilon$:

$$(v) \qquad |\Lambda_{n-1}(\partial_x p_\varepsilon)| \leq \exp\left(\frac{1}{2} h(r(x)-\epsilon)\right) .$$

Angenommen, es sei $\mu_T(U_{\varepsilon/2}) > 0$. Setze dann

$$R = (p_\varepsilon)_* T \qquad \text{(pullforward)} .$$

Dann gilt [SL: 26.21]:

$$\begin{aligned} \partial R &= \partial(p_\varepsilon)_* T = (p_\varepsilon)_* \partial T = \partial T \quad , \text{ aber} \\ M(R) &\leq \int_\Omega |\Lambda_{n-1}(\partial_x p_\varepsilon)\, \vec{T}|\, d\mu_T(x) \\ &\leq \mu_T(\Omega_{\varepsilon/2}) + \int_{U_{\varepsilon/2}} |\Lambda_{n-1}(\partial_x p_\varepsilon)\cdot\vec{T}|\, d\mu_T(x) \\ &\overset{(v)}{\leq} \mu_T(\Omega_{\varepsilon/2}) + \exp(-\tfrac{h\epsilon}{4})\, \mu_T(\overline{U}_{\varepsilon/2}) \\ &< \mu_T(\overline{\Omega}) = M(T) . \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, daß T minimiert. ∎

Sei nun $\sigma > R_0$ und $h \in \mathbb{R}$. Wir orientieren $Z_\sigma = \partial\Omega_\sigma$ durch die äußere Normale, und versehen $S := S(\sigma,h)$ mit der durch

$$S = \partial\{x \in Z_\sigma \mid x^n < h\}$$

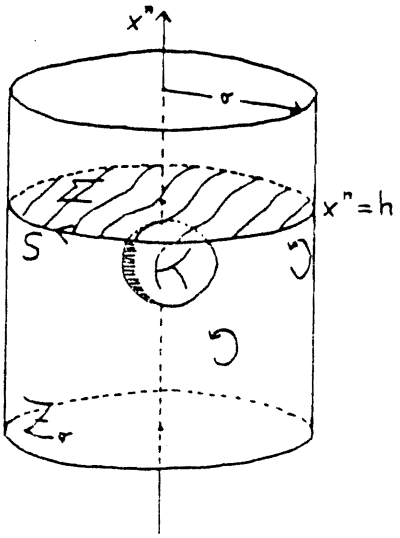
induzierten Orientierung η. Jetzt fassen wir S als $(n-2)$-Strom auf durch

$$[S] := \tau(S,1,\eta)$$

und betrachten die Klasse

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\sigma,h) = \left\{T \in \mathcal{D}_{n-1}(M) \mid \text{spt } T \text{ kompakt, } T \text{ rektifizierbar, } \partial T = [S]\right\} .$$

Wir bemerken, daß $\mathcal{C}$ nicht leer ist.



(4.1.2) (*Existenz der Plateaulösungen* $\Sigma(\sigma,h)$)

Sei $\sigma > R_0$ und $h \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine Lösung $\Sigma = \Sigma(\sigma,h) \in \mathcal{C}(\sigma,h)$ des Problems

$$M(\Sigma) \leq M(T) \qquad \text{für alle } T \in \mathcal{C}(\sigma,h) \ .$$

Zu Σ existieren offene, orientierte, glatte Untermannigfaltigkeiten Σ_j $(j \in \mathbb{N})$ sowie Zahlen $n_j \in \mathbb{N}$, so daß mit $[\Sigma_j] = \tau(\Sigma_j,1,\xi_j)$ (ξ_j Orientierung von Σ_j) gilt:

$$\Sigma = \sum_{j=1}^{\infty} n_j [\Sigma_j] \qquad (\Sigma_i \cap \Sigma_j = \phi \quad \text{für } i \neq j) \ .$$

Beweis: Wir denken uns M isometrisch in einen $\mathbb{R}^m$ eingebettet [NJ]. Zu $R > \sigma$ betrachten wir die Klasse

$$\mathcal{C}_R = \{T \in \mathcal{C} \mid \text{spt } T \subset M_R\} \ .$$

Für $R >> 1$ ist $\mathcal{C}_R$ nichtleer und kann als Teilmenge von $\mathcal{D}_{n-1}(\mathbb{R}^m)$ aufgefaßt werden. Wir wenden nun [FH; 5.1.6 (1)] an, und zwar mit:

$$Z = \mathbb{R}^m \ , \quad A = \overline{M}_R \ , \quad R = [S] \ , \quad B = \emptyset \ .$$

Hieraus folgt die Existenz eines in C_R minimierenden Stroms Σ. Nun hat für ausreichend großes R der Rand ∂M_R strikt positive mittlere Krümmung (in M) bzgl. der äußeren Normalen, denn es gilt nach (1.2.14):

$$H_{\partial M_R}(x) = \varphi(x)^{1-\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{R} + \frac{a}{2\varphi} (\partial_N \varphi)(x) \right)$$

(N = euklidische Normale an ∂M_R).

Also gilt nach (4.1.1) spt Σ cc M_R und Σ minimiert in $\bigcup_{R>>1} C_R = C$.

Wir wenden auf Σ die Regularitätsaussage der geometrischen Maßtheorie an. Danach ist spt $\Sigma \sim$ spt S eine glatte Untermannigfaltigkeit von M wegen der Dimensionsbeschränkung dim $M \leq 7$ [FH; 5.4.15], [SL; 37.7]. Die Zerlegung von Σ ergibt sich aus [SL; 37.8 und 37.9]. ∎

Bemerkung:

Unter Verwendung des Randregularitätsresultats [HS; 11.2] können wir schließen, daß spt Σ *eine zusammenhängende, berandete, glatte* und *orientierte Untermannigfaltigkeit* ist, *die mit Vielfachheit* 1 *versehen den Strom* Σ *liefert.* Wir wollen jedoch die Anwendung dieses nichttrivialen Ergebnisses vermeiden.

(4.1.3) Lemma.

(1) Für σ groß genug (unabhängig von h) gilt:

$$\text{spt } \Sigma(\sigma,h) \subset \overline{\Omega}_\sigma .$$

(2) Für festes σ ist die Funktion $v_\sigma(h) := \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h))$ (Lipschitz-)stetig.

Beweis: (1) folgt leicht aus dem Maximumprinzip, weil die mittlere Krümmung von $Z_\sigma = \partial\Omega_\sigma$ bzgl. der äußeren Normalen für $\sigma >> 1$ strikt positiv ist (vgl. das Argument im Beweis von (4.1.2)).

Um (2) einzusehen, sei $h_1 < h_2$ und $\sigma > R_0$ fest. Betrachte

$$Z = \{x \in Z_\sigma \mid h_1 < x^n < h_2\} \quad .$$

Wird Z mit der Orientierung von Z_σ versehen, so gilt:

$$\partial[Z] = [S(\sigma,h_2)] - [S(\sigma,h_1)] \quad .$$

Folgiich ist $\Sigma(\sigma,h_1) + [Z]$ zulässiger Vergleichsstrom für die Minimalität von $\Sigma(\sigma,h_2)$:

$$v_\sigma(h_2) \leq v_\sigma(h_1) + v^{n-1}(Z) \quad .$$

Da dieses Argument umkehrbar ist, folgt:

$$\begin{aligned} |v_\sigma(h_2)-v_\sigma(h_1)| &\leq v^{n-1}(Z) \\ &\leq \chi^{n-1}(Z) \qquad \text{(wegen (4.0.3.2)} \\ &= \omega_{n-1}\,\sigma^{n-2}\,|h_2-h_1| \quad . \end{aligned}$$

∎

Bis jetzt wurde die indirekte Annahme $A < 0$ noch nicht benutzt. In dem folgenden Lemma geht sie aber *entscheidend* ein:

(4.1.4) Lemma.

(1) Zu $\sigma > R_0$ existiert ein $h(\sigma) \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h(\sigma))) \leq \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h)) \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R} \quad .$$

(2) Es existiert eine Konstante $h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 = h_0(\not{r})$, mit

$$\text{spt } \Sigma(\sigma,h(\sigma)) \subset \{x \in M \mid |x^n| \leq h_0\} \quad .$$

Beweis: Wir berechnen

$$(\partial_n\varphi)(x) = \frac{(2-n)A}{|x|^{n-1}}\frac{x^n}{|x|} + \partial_n h(x) \quad .^{1)}$$

Wählen wir daher $h_0 > \max\left\{R_0 , \frac{c_1}{(2-n)A}\right\} > 0$, so folgt

(i) $\qquad \frac{\partial_n\varphi}{\varphi}(x) > 0 \quad , \quad \text{falls } x^n \geq h_0 \quad .$

Sei nun $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\psi \equiv 0$ für $h \leq h_0$. Betrachte das Vektorfeld $X = \psi(x^n)e_n$. X ist global auf M definiert, und es gilt (1.1.6):

(ii) $\qquad \operatorname{div}_M X = \psi'(x^n) + p\psi(x^n)\frac{\partial_n\varphi}{\varphi}(x) \quad .$

Sei Σ_j eine der Flächen aus (4.1.2), und ν die Riemannsche Normale an Σ_j : Dann gilt wegen (1.1.5), wenn $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet:

$$\begin{aligned} g(D_\nu X,\nu) &= \varphi^{p-2}\left\{\langle\partial_\nu X,\nu\rangle + \frac{p-2}{2\varphi}(\partial_X\varphi)\,|\nu|^2\right\} \\ &= \varphi^{p-2}\left\{\psi'(x^n)\,\langle\nu,e_n\rangle^2 + \psi(x^n)\frac{p-2}{2\varphi}(\partial_n\varphi)\,|\nu|^2\right\} \\ &= \psi'(x^n)\,g(\nu,\tilde{e}_n)^2 + \frac{p-2}{2\varphi}\psi(x^n)\,\partial_n\varphi \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist $\tilde{e}_n = \varphi^{1-\frac{p}{2}} e_n$ ein g-Einheitsvektor. Aus (1.2.12) ergibt sich:

(iii) $\qquad \operatorname{div}^{\tau}_{\Sigma_j} X = (1 - g(\nu,\tilde{e}_n)^2)\,\psi'(x^n) + \frac{p+2}{2\varphi}\psi(x^n)\,\partial_n\varphi \quad .$

Betrachte jetzt die Diffeomorphismenschar

$$\begin{aligned} & f_t(x) && := x + t\psi(x^n)\,e_n \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dt} f_t(x)\Big|_{t=0} && = X(x) \\ & f^n_t(x) && = x^n + t\psi(x^n) \equiv h + t\psi(h) \quad \text{für } x \in S(\sigma,h) \quad . \end{aligned}$$

Wähle ψ so, daß gilt:

$$\psi(x^n) > 0 \quad \text{für} \quad x^n > h_0 \quad , \quad \psi'(x^n) \geq 0 \quad .$$

---

1) h ist hier die Funktion aus (4.0.1.2).

Sei $\mu_h = \sum_{j=1}^{\infty} n_j(\nu^{n-1} \llcorner \Sigma_j)$ das Gewichtsmaß von $\Sigma(\sigma,h)$. Dann folgt aus der Formel (1.3.2) für die erste Variation (vgl. [SL; 16.2]):

$$\text{(iv)} \qquad \frac{d}{dt}\,\mathbf{M}\left((f_t)_*\,\Sigma(\sigma,h)\right)\Big|_{t=0} = \int_{\{x^n>h_0\}} (1 - g(\nu,\tilde{e}_n)^2)\,\psi'(x^n)\,d\mu_h + \frac{p+2}{2}\int_{\{x^n>h_0\}} \psi(x^n)\,\frac{\partial_n\varphi}{\varphi}\,d\mu_h \quad .$$

Falls $\mu_h\{x \mid x^n > h_0\} > 0$, so folgt nach Wahl von h_0, ψ und wegen $g(\nu,\tilde{e}_n)^2 \le 1$

$$\text{(v)} \qquad \frac{d}{dt}\,\mathbf{M}\left((f_t)_*\,\Sigma(\sigma,h)\right)\Big|_{t=0} > 0 \quad .$$

Wählen wir also $t < 0$ genügend nahe bei Null, so gilt unter der Annahme "*Falls...*":

$$\mathbf{M}\left((f_t)_*\,\Sigma(\sigma,h)\right)\Big|_{t=0} < \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h)) \quad .$$

Aber wir haben

$$\partial\left((f_t)_*\,\Sigma(\sigma,h)\right) = (f_t)_*\,\partial\Sigma(\sigma,h) = (f_t)_*\,[S(\sigma,h)] = [S(\sigma,h+t\psi(h))] \quad .$$

Aus der Minimalität von $\Sigma(\sigma,h+t\psi(h))$ folgt unter "*Falls...*"

$$\text{(vi)} \qquad \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h')) < \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h)) \quad ,$$

wenn nur $h' < h$ genügend nahe bei h gewählt ist. Insbesondere ist die Funktion $v_\sigma(h) = \mathbf{M}(\Sigma(\sigma,h))$ streng monoton wachsend für $h > h_0$ ("*Falls...*" ist für $h > h_0$ gegeben), und aus Symmetriegründen streng monoton fallend für $h < -h_0$. Aus der Stetigkeit von $v_\sigma(h)$ (4.1.3.2) folgt nun die gewünschte Existenz des Minimums $h(\sigma) \in [-h_0,h_0]$, und außerdem gilt wegen (vi) $\mathrm{spt}(\Sigma(\sigma,h(\sigma))) \subset \{x \mid |x^n| \le h_0\}$. ∎

Ab jetzt setzen wir $\Sigma_\sigma = \Sigma(\sigma,h(\sigma))$ und arbeiten nur noch mit diesen Strömen. Wir bezeichnen das Gewichtsmaß von Σ_σ mit μ_σ : $\mu_\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} n_j(\sigma)(v^{n-1} \llcorner \Sigma_j(\sigma)) = v^{n-1} \llcorner \theta_\sigma$.

Es ist für den Beweis des Positive Energy Theorem wesentlich (in dim $M \geq 4$), daß die Ströme Σ_σ gegenüber den Plateaulösungen $\Sigma(\sigma,h)$ nach Konstruktion eine *zusätzliche Stabilität* aufweisen:

(4.1.5) Korollar.

Sei X ein Vektorfeld auf M mit $X \equiv \alpha e_n$ auf E_R (für ein $\alpha \in \mathbb{R}$). Sei $b_{\sigma,X}$ der Integrand der zweiten Variation auf spt Σ_σ bzgl. X . Ist dann $\sigma > R$, so gilt:

$$\int b_{\sigma,X}\, d\mu_\sigma \geq 0 \quad .$$

Beweis: Dies folgt aus der Definition von $b_{\sigma,X}$ (1.3.1) und den Stabilitätseigenschaften der Σ_σ .

Das nächste Ziel ist jetzt die Konstruktion eines Grenzstroms $\Sigma_\sigma \rightharpoonup \Sigma$ mit $\sigma \to \infty$. Bekanntermaßen werden dazu *gleichmäßige Volumenschranken* für die Σ_σ auf präkompakten Gebieten benötigt. Diese lassen sich nur durch Konstruktion geeigneter Vergleichsflächen aus der Minimalität der Σ_σ folgern.

(4.1.6) Lemma.

Sei $\xi \in H$, $R_0 < |\xi| < \sigma$. Dann gilt

$$p^{-1}\{\xi\} \cap \text{spt } \Sigma_\sigma \neq \emptyset \quad .$$

Beweis: Wir verwenden den *Konstanzsatz* [SL; 26.27]. Beachte, daß der dort gegebene Beweis auf einem lokalen Argument beruht und folglich in den Riemannschen Fall übertragen werden kann. Betrachte

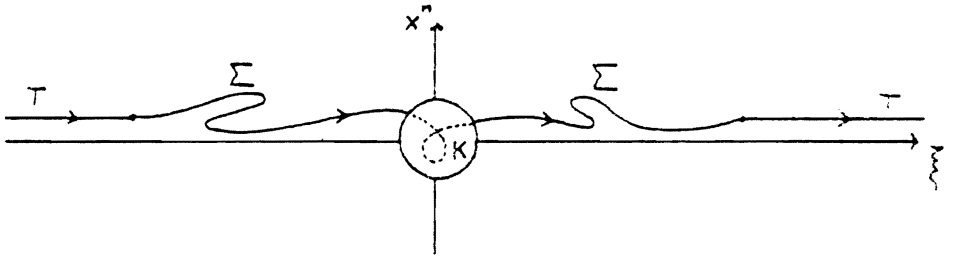
$$\tilde{\Sigma} = \Sigma_\sigma \llcorner \{x| \ |\xi(x)| > R_0\} \in \mathcal{D}_{n-1}(U) \qquad \text{mit}$$

$$U = \{x \in M| \ |\xi(x)| > R_0\} \ .$$

Es gilt $\partial\tilde{\Sigma} = [S(\sigma,h(\sigma))] \in \mathcal{D}_{n-2}(U)$.

Setze $T := [\{x \in M||\xi| > \sigma \ , \ x^n = h(\sigma)\}]$. Bei geeigneter Orientierung von T gilt:

$$\partial(\tilde{\Sigma} + T) = 0 \ .$$



Setze $V = p(U) \subset H$ und beachte, daß p auf $spt(\tilde{\Sigma}+T)$ eigentlich ist. Damit gilt

$$\partial p_*(\tilde{\Sigma} + T) = p_*\partial(\tilde{\Sigma} + T) = 0 \in \mathcal{D}_{n-2}(V) \ .$$

Da V zusammenhängend und $p_*(\tilde{\Sigma}+T)$ rektifizierbar ist, impliziert der Konstanzsatz

$$p_*(\tilde{\Sigma}+T) = \alpha[V] \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{Z} \ .$$

Nun gilt $\tilde{\Sigma} \llcorner \{|\xi| > \sigma\} = 0$ wegen (4.1.3.1) und somit $\alpha = 1$. Wäre $\xi \in H$ wie in der Behauptung, aber mit $p^{-1}\{\xi\} \cap spt\ \Sigma_\sigma = \emptyset$, so gäbe es ein $\rho > 0$ mit $C(\xi,\rho) \cap spt\ \Sigma_\sigma = \emptyset$, denn $spt\ \Sigma_\sigma$ ist kompakt. Dann folgte aber

$$p_*(\Sigma \llcorner C(\xi,\rho)) = 0$$

also $\alpha = 0$, ein Widerspruch. ∎

(4.1.7) Lemma.

Es existiert eine Konstante $c_2 = c_2(\phi)$ mit folgender Eigenschaft:

Ist $V \subset \{\xi \in H |\ R_0 \leq |\xi| < \sigma\}$, so gilt

$$\mu_\sigma(p^{-1}V) \geq v^{n-1}(V) - c_2 \quad .$$

Beweis: Setze $\Sigma = \Sigma_\sigma$ und bezeichne mit $Jp(x)$ $(x \in \operatorname{spt} \Sigma)$ die $(n-1)$-dimensionale Jacobische von p auf $\operatorname{spt} \Sigma$ bzgl. der *euklidischen* Metrik. Dann gilt $Jp(x) \leq 1$, also impliziert die Flächenformel [SL; 8.4]:

$$\begin{aligned}
&\mu_\sigma(p^{-1}V) \\
&\overset{(1.1.3)}{=} \int_{p^{-1}V} \varphi^{\frac{n}{2}+1}(x)\ \theta(x)\ d\mathcal{H}^{n-1}(x) \qquad (\theta = \theta_\sigma) \\
&= \int_V \sum_{x \in p^{-1}\{\xi\}} \theta(x)\ \varphi^{\frac{n}{2}+1}(x)\ Jp(x)^{-1}\ d\mathcal{L}^{n-1}(\xi) \\
&\geq \int_V \sum_{x \in p^{-1}\{\xi\}} \theta(x) \left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)}\right)^{\frac{n}{2}+1} dv^{n-1}(\xi) \quad .
\end{aligned}$$

Die asymptotischen Bedingungen für φ liefern für $x \in \operatorname{spt} \Sigma$:[2)]

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(\xi) &= \underbrace{A}_{<0} \underbrace{\left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{|\xi|^{n-2}}\right)}_{<0} + h(x) - h(\xi) \\
&\geq \int_0^{x^n} \frac{d}{dt}\left(h(\xi + te_n)\right) dt \\
&\geq -\int_0^{|x^n|} |\partial h(\xi + te_1)|\ dt \\
&\geq -\frac{c_1 h_0}{|\xi|^n} \qquad (\text{wegen } |x^n| \leq h_0)
\end{aligned}$$

---

2) h ist die Funktion aus (4.0.1.2).

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)} \geq 1 - \frac{c_1 h_0}{|\xi|^n \varphi(\xi)} \overset{(4.0\,.\,3.2)}{\geq} 1 - \frac{2c_1 h_0}{|\xi|^n} \quad .$$

Es folgt die Existenz einer Konstante $c = c(\phi)$ mit

$$\left(\frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)}\right)^{\frac{p}{2}+1} \geq 1 - \frac{c}{|\xi|^n} \quad .$$

Setzen wir dies ein und beachten Lemma (4.1.6), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu_\gamma(p^{-1}V) &\geq \int_\gamma \left(1 - \frac{c}{|\xi|^n}\right) dv^{n-1}(\xi) \\ &\overset{(4.0\,.\,3.2)}{\geq} v^{n-1}(V) - c \int_\gamma |\xi|^{-n}\, d\mathcal{L}^{n-1}(\xi) \\ &\geq v^{n-1}(V) - c \int_{\{\xi \mid R_0 \leq |\xi| < \infty\}} |\xi|^{-n}\, d\mathcal{L}^{n-1}(\xi) \\ &\geq v^{n-1}(V) - \frac{c\omega_{n-1}}{R_0} \quad . \end{aligned}$$

(4.1.8) Lemma.

Es existiert eine Konstante $c_3 = c_3(\phi)$ mit folgender Eigenschaft: Ist

$$U \subset \{\xi \in H \mid R_0 \leq |\xi| < \sigma\} \quad ,$$

so gilt

$$(\chi^{n-1} \llcorner \theta_\sigma)(p^{-1}U) \leq \frac{4}{3}\chi^{n-1}(U) + c_3 \quad .$$

Beweis: Setze wieder $\Sigma_\sigma = \Sigma$. Betrachte die Fläche $F = F_1 \cup F_2$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\xi \in H \mid R_0 \leq |\xi| < \sigma\} \\ F_2 &= \{x \in M \mid |x| = R_0,\ x^n > 0\} \quad . \end{aligned}$$

Bei geeigneter Wahl der Orientierung ist $[F]$ zulässiger Vergleichsstrom (?) für Σ , daß heißt

$$\underline{\underline{M}}(\Sigma) \leq v^{n-1}(F) \quad .$$

Mit $c = \chi^{n-1}(F_2)$ gilt (beachte (4.0.3.2)):

$$v^{n-1}(F) \leq c + v^{n-1}(F_1 \sim U) + \chi^{n-1}(U) \quad .$$

Andererseits haben wir wegen Lemma (4.1.7)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}(\Sigma) &= \mu_\sigma(p^{-1}U) + \mu_\sigma(p^{-1}(F_1 \sim U)) + \mu_\sigma(\Omega_{R_0}) \\ &\geq \mu_\sigma(p^{-1}U) + v^{n-1}(F_1 \sim U) - c_2 + \mu_\sigma(\Omega_{R_0}) \quad . \end{aligned}$$

Zusammensetzen der drei Ungleichungen ergibt

$$(*) \qquad \mu_\sigma(p^{-1}U) + \mu_\sigma(\Omega_{R_0}) \leq \chi^{n-1}(U) + c + c_2 \quad .$$

Nun gilt wegen (4.0.3.2) $v^{n-1} \geq \frac{3}{4}\chi^{n-1}$, und daher $\mu_\sigma = v^{n-1} \llcorner \theta_\sigma \geq \frac{3}{4}\chi^{n-1} \llcorner \theta_\sigma$ auf M_∞. Also folgt die Behauptung mit $c_3 = \frac{4}{3}(c + c_2)$. ∎

(4.1.9) *Existenz des Grenzstroms* Σ

Es existiert ein rektifierbarer Strom $\Sigma = \sum_{j=1}^{\infty} n_j[\Sigma_j]$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Σ_j ist eine glatte, offene, orientierte Hyperfläche in M, $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ für $i \neq j$, $n_j \in \mathbb{N}$.

(2) Nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gilt

$\Sigma_\sigma \rightarrow \Sigma$ (im Sinne der Ströme)

$\mu_\sigma \rightarrow \mu = \mu_\Sigma$ (im Sinne der Radonmaße) für $\sigma \to \infty$.

(3) Σ ist lokal minimierend.

Beweis: Wir nehmen wie in (4.1.2) $M \subset \mathbb{R}^m$ an. Die Ungleichung (*) aus (4.1.8), angewandt auf $U = \{\xi \in H \mid R_0 \leq |\xi| < \tau\}$, liefert für $\sigma > \tau$:

$$\mu_\sigma(\Omega_\tau) \leq \alpha_{n-1}\,\tau^{n-1} + c \quad , \quad c = c(\phi) \quad .$$

Folglich sind die Massen der Ströme Σ_σ lokal gleichmäßig beschränkt, so daß nach Auswahl einer Teilfolge gilt [SL; 26.14]:

$\Sigma_\sigma \rightharpoonup \Sigma$ (im Sinne der Ströme), $\partial\Sigma = 0$. Wegen des Auswahlsatzes für lokal minimierende Ströme [SL; 34.5 und 34.6 (2)] ist Σ minimierend in M (lokal) und $\mu_\sigma \rightharpoonup \mu_\Sigma$ im Sinne der Radonmaße (insbesondere ist Σ rektifizierbar). Die Aussage (1) folgt nun aus den schon in (4.1.2) benutzten Regularitätsaussagen [FH: 5.4.15], [SL; 37.7]. ∎

4.2 Regularität der Plateaulösungen Σ_σ

In diesem Abschnitt betrachten wir spt Σ_σ als *euklidische* Hyperfläche in $\{x \in M \mid |\xi| > R_0\}$. Σ_σ ist das *Radonmaß*

$$\lambda_\sigma = \chi^{n-1} \llcorner \theta_\sigma \quad (\Sigma_\sigma = \tau(\mathrm{spt}\,\Sigma_\sigma\,,\,\theta_\sigma\,,\,\vec{\Sigma}_\sigma))$$

zugeordnet. In E_{R_0} besitzt spt Σ_σ eine *euklidische mittlere Krümmung* H^0_σ. Ferner definieren wir den *euklidischen Exzess von* Σ_σ *über* H durch

$$E_\sigma(x,\rho) = \frac{1}{2\rho^{n-1}} \int_{B_\rho(x)} |p_{T_y\Sigma} - p_H|^2 \, d\lambda_\sigma(y) \quad .$$

Wir wollen nun auf *großen Kugeln* die Voraussetzungen des Regularitätssatzes von Allard in der Version [SL; 23.1] verifizieren.

(4.2.1) Lemma.

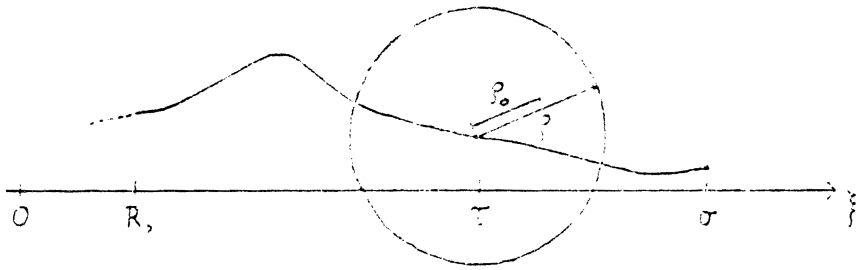
Es existiert eine Konstante $\rho_0 = \rho_0(\phi)$ mit folgender Eigenschaft:

Sei $\rho_0 \leq \rho \leq \tau - R_0$ und $\sigma > \tau + \rho$.

Ist dann $x = (\xi, x^n) \in \operatorname{spt} \Sigma_\sigma$ mit $|\xi| = \tau$, so gilt:

$$\frac{\lambda_\sigma(B_\rho(x))}{\alpha_{n-1}\,\rho^{n-1}} \leq \frac{3}{2} \quad .$$

Beweis:



Wähle ρ_0 so, daß gilt:

$$c_3 = \frac{1}{6}\,\alpha_{n-1}\,\rho_0^{n-1} \quad (c_3 \text{ aus Lemma (4.1.8)}) \quad .$$

Wende dann (4.1.8) an mit $U = p(B_\rho(x))$:

$$\frac{\lambda_\sigma(B_\rho(x))}{\alpha_{n-1}\,\rho^{n-1}} \leq \frac{4}{3} + \frac{c_3}{\alpha_{n-1}\,\rho^{n-1}} \leq \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2} \quad . \qquad \blacksquare$$

(4.2.2) **Lemma.**

Es existieren Konstanten $\tau_0 = \tau_0(\psi)$, $\rho_0 = \rho_0(\psi)$ mit folgenden Eigenschaften: Sei $\tau \geq \tau_0 \geq 2R_0$, $\rho_0 \leq \rho \leq \frac{\tau}{2}$ und $\sigma > \frac{3}{2}\tau$. Ist dann $x = (\xi, x^n) \in \operatorname{spt} \Sigma_\sigma$ mit $|\xi| = \tau$, so gilt:

(1) $$\frac{\lambda_\sigma(B_\rho(x))}{\alpha_{n-1}\,\rho^{n-1}} \leq \frac{3}{2}$$

(2) $$\left(\int_{B_\rho(x)} |H_\sigma^0|^n \, d\lambda_\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon(n)$$

(3) $$E_\sigma(x, \tfrac{\rho}{2}) \leq \varepsilon(n) \quad .$$

Dabei ist $\varepsilon(n)$ die Konstante aus [SL 69.1]

Beweis: Sei zunächst ρ_0 die Konstante aus (4.2.1), und $\tau_0 = \max\{R_0 + \rho_0, 2R_0\}$. Ist dann $\tau \geq \tau_0$ und $\rho_0 \leq \rho \leq \frac{\tau}{2}$, so sind die Voraussetzungen von (4.2.1) gewährleistet, also gilt (1). Wir berechnen

$$\left(\int_{B_\rho(x)} |H^0_\sigma|^n \, d\lambda_\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sup_{\text{spt } \Sigma_\sigma \cap B_\rho(x)} |H^0_\sigma|\right) \lambda_\sigma(B_\rho(x))^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\alpha_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \rho \left(\sup_{\text{spt } \Sigma_\sigma \cap B_\rho(x)} |H^0_\sigma|\right) .$$

Sei N die euklidische Normale an spt Σ_σ. Da spt Σ_σ Riemannsche Minimalfläche ist, gilt für die euklidische mittlere Krümmung nach (1.2.14)

$$|H^0_\sigma(x)| = \frac{a}{2}\left|\frac{\partial_N \varphi(x)}{\varphi(x)}\right|$$

$$\leq a\,|\delta\varphi(x)| \qquad \text{(wegen (4.0.3.2))}$$

$$\leq \frac{c_4}{|\xi|^{n-1}}$$

mit $c_4 = c_4(n, R_0, A, c_1, h_0) = c_4(\frac{1}{\rho})$.

Beachte dabei, daß aufgrund der Höhenschranke (4.1.4.2) $|x|$ nach oben durch $|\xi|$ abgeschätzt ist. Es folgt:

$$\left(\int_{B_\rho(x)} |H^0_\sigma|^n \, d\lambda_\sigma\right)^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{3}{2}\alpha_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} \rho \, \frac{c_4}{|\tau-\rho|^{n-1}}$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\alpha_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} c_4 \left(\frac{\tau}{2}\right)^{2-n}$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\alpha_{n-1}\right)^{\frac{1}{n}} c_4 \left(\frac{\tau_0}{2}\right)^{2-n} .$$

Indem wir τ_0 - abhängig von n und c_4 - vergrößern, gilt Teil (2) der Behauptung. Um den Exzess abzuschätzen, verwenden wir [SL; 22.2 bzw. 22.3]. Danach gilt mit einer universellen Konstante c, die nicht einmal von n abhängt:

$$E_\sigma(x,\tfrac{\rho}{2}) \le c\left\{\rho^{1-n}\int_{B_\rho(x)}\left(\frac{\operatorname{dist}(y-x,H)}{\rho}\right)^2 d\lambda_\sigma(y) + \left(\int_{B_\rho(x)} |H_\sigma^0|^n\, d\lambda_\sigma\right)^{\frac{2}{n}}\rho^{\frac{2}{n}}\right\}$$

$$\le c\left\{(2h_0)^2\frac{\lambda_\sigma(B_\rho(x))}{\rho^{n+1}} + \frac{c(n,c_4)}{\tau^{2(n-2)}}\right\}$$

$$\le c(n,c_4,h_0)\left\{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^{2(n-2)}}\right\} \quad .$$

Indem wir daher unabhängig von σ erst ρ_0 und dann τ_0 vergrößern und beachten, daß dabei (1) und (2) erhalten bleiben, folgt nun auch $E_\sigma(x,\frac{\rho}{2}) \le \varepsilon(n)$.

∎

(4.2.3) *Darstellung der Σ_σ als Graphen*

Es existieren Konstanten $\tau_0 = \tau_0(\frac{1}{\sigma})$, $c_5 = c_5(\frac{1}{\sigma})$, so daß folgendes gilt:

(1) spt $\Sigma_\sigma \cap \{x|\ \tau_0 < |\xi| < \frac{2}{3}\sigma\}$ ist Graph einer C^∞-Funktion

$$u_\sigma : \{\xi \in H | \tau_0 < |\xi| < \tfrac{2}{3}\sigma\} \to [-h_0,h_0] \quad .$$

(2) Für $\xi \in H$ mit $\tau_0 < |\xi| < \frac{2}{3}\sigma$ gilt:

$$|\partial u_\sigma(\xi)| \le \frac{c_5}{|\xi|}$$

$$\text{höl}_{\frac{1}{n}}(\partial u_\sigma,\xi) \le \frac{c_5}{|\xi|^{1+\frac{1}{n}}} \quad .$$

(3) $\Sigma_\sigma \llcorner \{\tau_0 < |\xi| < \frac{2}{3}\sigma\} = [\text{Graph } u_\sigma]$ bei geeigneter Wahl der Orientierung des Graphen.

Beweis: Sei τ_0 die Konstante aus (4.2.2). Wir können (unabhängig von σ) τ_0 so weit vergrößern, daß zusätzlich zu (4.2.2) gilt:

$$\tau_0 \ge 4\max\{1,\rho_0\} \qquad (\rho_0 \text{ aus } (4.2.2))$$

$$(\tfrac{\gamma\tau}{4})^2 - (2h_0)^2 \ge (\tfrac{\gamma\tau}{8})^2 \qquad \text{für } \tau \ge \tau_0 \quad ,$$

wobei $\gamma = \gamma(n)$ die Konstante aus [SL; 23.1] ist. Sei nun $x = (\xi, x^n) \in \operatorname{spt} \Sigma_\sigma$, $\tau_0 < |\xi| = \tau < \frac{2}{3}\sigma$. Dann gilt:

$$\rho_0 \leq \frac{\tau_0}{4} < \frac{\tau}{4} < \frac{\tau}{2} \quad , \quad \sigma > \frac{3}{2}\tau \quad .$$

Also können wir Lemma (4.2.2) anwenden mit $\rho = \frac{\tau}{4}$ *und* mit $\rho = \frac{\tau}{2}$. Insbesondere gelten (4.2.2.1) und (4.2.2.2) mit $\rho = \frac{\tau}{4}$ sowie (4.2.2.3) mit $\rho = \frac{\tau}{2}$. Folglich gelten alle Voraussetzungen von [SL; 23.1] mit $\rho = \frac{\tau}{4}$. Es existiert eine $C^{1,\alpha}$-Funktion $(\alpha = \frac{1}{n})$

$$u_\sigma : B^{n-1}_{\frac{\gamma\tau}{4}}(\xi) \longrightarrow [-h_0, h_0] \quad ,$$

so daß gilt:

$$\operatorname{spt} \Sigma_\sigma \cap B_{\frac{\gamma\tau}{4}}(x) = (\operatorname{graph} u_\sigma) \cap B_{\frac{\gamma\tau}{4}}(x) \quad ,$$

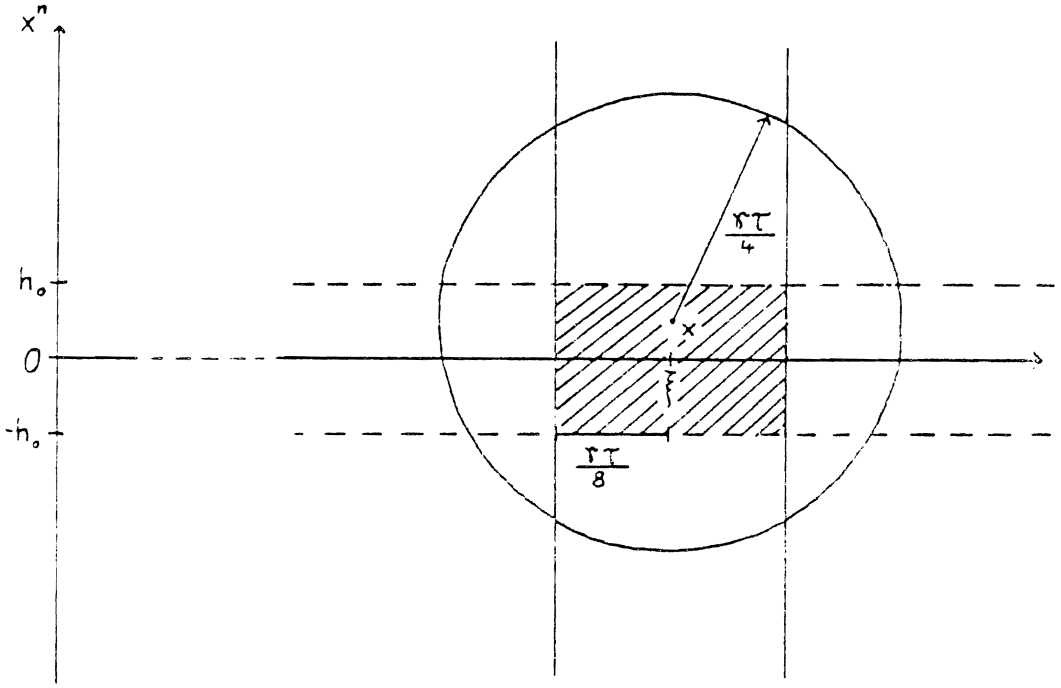
und ferner gilt die a-priori-Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\sup |\partial u_\sigma| + (\tfrac{\tau}{4})^{\frac{1}{n}} \, \text{höl}_{\frac{1}{n}} (\partial u_\sigma) \\
&\leq c(n) \left\{ E_\sigma(x, \tfrac{\tau}{4})^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_{\frac{\tau}{4}}(x)} |H^2_\sigma|^n \, d\lambda_\sigma \right)^{\frac{1}{n}} \rho^{\frac{1}{n}} \right\} \\
&\leq c(n) \, c(n, c_4, h_0) \left\{ \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^{n-2}} \right\} \\
&\leq \frac{c_5}{\tau} \qquad \text{(dies definiert } c_5 = c_5(\phi)) \quad .
\end{aligned}$$

Dabei ist $c(n)$ die Konstante aus [SL; 23.1], und die Abschätzung von $\{\ldots\}$ ergibt sich aus dem *Beweis* von (4.2.2).

Aufgrund der Höhenschranke für $\operatorname{spt} \Sigma_\sigma$ gilt nach Wahl von τ_0 am Anfang des Beweises:

$[\operatorname{spt} \Sigma_\sigma \cap C(\xi, \frac{\gamma\tau}{8})] \subset B_{\frac{\gamma\tau}{4}}(x)$:



Insbesondere folgt nun Behauptung (1) (in Zusammenhang mit der lokalen Regularität von spt Σ_σ), sowie die a-priori-Abschätzung für den Gradienten von u_σ. Die Hölderabschätzung gilt zunächst nur für Punkte $\eta \in B^{n-1}_{\frac{\gamma\tau}{8}}(\xi)$. Sei aber $\eta \in H$ mit $\tau_0 < |\eta| < \frac{2}{3}\sigma$, und $|\xi-\eta| \geq \frac{\gamma\tau}{8}$. Dann folgt

$$\frac{|\partial u_\sigma(\xi)-\partial u_\sigma(\eta)|}{|\xi-\eta|^{\frac{1}{n}}} \leq \left(\frac{8}{\gamma\tau}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{c_5}{|\xi|} + \frac{c_5}{|\eta|}\right) .$$

Da wir zur Definition der Hölderkonstante nur Punkte η mit $|\xi-\eta| \geq \frac{1}{4}|\xi|$ heranziehen (vgl. die Definition in Kapitel 2), gilt somit (2). Behauptung (3) folgt unmittelbar aus dem Beweis von (4.1.6). Dort war gezeigt worden, daß $p_*\Sigma_\sigma \equiv [H]$ für $R_0 < |\xi| < \sigma$. ∎

(4.2.4) Sei $\Sigma_1(\sigma)$ die Zusammenhangskomponente von Graph u_σ in der Zerlegung von Σ_σ nach (4.1.2). Dann gilt nach obigem $n_1(\sigma) = 1$. Setzen wir $\Sigma_2(\sigma) :=$ spt $\Sigma_\sigma \sim \Sigma_1(\sigma)$, so gilt

$$\Sigma_2(\sigma) \subset \{x \in M |\ |\xi| \geq \frac{2}{3}\sigma\} \quad .$$

Dies begründet man so:

Wir wissen, daß jede Zusammenhangskomponente von spt $\Sigma_\sigma \sim$ spt $\partial\Sigma_\sigma$ eine glatte, offene Hyperfläche in M ist. Gäbe es daher in $\{x \in M |\ |\xi| \leq \tau_0,\ |x^n| \leq h_0\}$ außer $\Sigma_1(\sigma)$ eine weitere Komponente, so wäre diese *kompakt* und insbesondere *ohne Rand*. Dies widerspricht aber der Minimalität von Σ_σ.

Im Beweis von (4.2.2) haben wir den Regularitätssatz von Allard benutzt, weil sich dessen Voraussetzungen in der Version von [SL; 23.1] leicht verifizieren lassen. Insbesondere mußte das Riemannsche Hyperflächenvolumen nicht als $(n-1)$-dimensionaler parametrischer Integrand über $E_{B_0} \subset \mathbb{R}^n$ geschrieben werden. Wir weisen aber darauf hin, daß zum Beweis von (4.2.2) eine Version des Regularitätssatzes für *minimierende* Ströme [FH] *offensichtlich* ausreicht.

4.3 Regularität der Grenzfläche Σ

(4.3.1) *Regularität von* Σ, *Teil 1*

Sei $H_0 = \{\xi \in H |\ |\xi| > \tau_0\}$.

(1) Es existiert eine Funktion $u: H_0 \longrightarrow [-h_0, h_0]$ mit

$$\|u\|_{C^{1,\alpha}_0(H_0)} \leq h_0 + c_5 \qquad (\alpha = \frac{1}{n},\ c_5 \text{ aus (4.2.3)}),$$

so daß gilt:

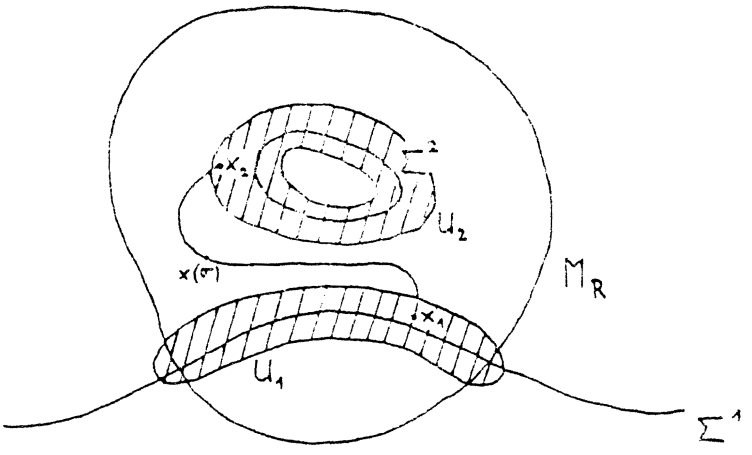
$$\text{spt } \Sigma \cap (H_0 \times \mathbb{R}) = \text{Graph } u \quad .$$

(2) spt Σ ist *zusammenhängend* und Σ entsteht dadurch, daß spt Σ mit der geeigneten Orientierung und *Vielfachheit Eins* versehen wird.

Beweis: Behauptung (1) folgt sofort aus der Definition von Σ (4.1.9), durch evtl. Auswahl einer Teilfolge und Anwendung von (4.2.3), (4.2.4).

Sei Σ^1 die Zusammenhangskomponente von Graph u . Dann trägt Σ^1 offenbar die Vielfachheit 1 , und für (2) genügt es zu zeigen, daß spt Σ keine weiteren Zusammenhangskomponenten besitzt.

Angenommen, dies sei falsch. Dann ist spt $\Sigma \sim \Sigma^1 = \Sigma^2$ eine *kompakte* Hyperfläche in M . Wähle $R > 0$ so, daß $\Sigma^2 \subset\subset M_R$. Es existieren offene Umgebungen U_1 bzw. U_2 von $\Sigma^1 \cap \overline{M}_R$, Σ^2, deren Abschluß disjunkt ist: $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \emptyset$, und $U_2 \subset M_R$.



Für ausreichend großes σ existieren Punkte $x^1(\sigma) \in U_1$, $x_2(\sigma) \in U_2$, die *beide* in $\Sigma_1(\sigma)$ - der Zusammenhangskomponente von graph u_σ - liegen. Dies gilt wegen (4.2.4). Dann finden wir aber einen Punkt $x(\sigma) \in \Sigma_1(\sigma)$ mit $x(\sigma) \in \overline{M}_R \sim (U_1 \cup U_2)$. Da diese Menge kompakt ist, gilt nach Auswahl einer Teilfolge $x(\sigma) \longrightarrow x \in \overline{M}_R \sim (U_1 \cup U_2)$. Entscheidendes Hilfsmittel ist nun die *Monotonieungleichung*, siehe etwa [FH; 5.1.6]. Diese liefert die Existenz eines $\rho = \rho(\phi) > 0$ sowie einer Konstanten $c = c(\phi) > 0$ mit $\mu_\sigma(\tilde{B}_r(x(\sigma)) \geq cr^{n-1}$ für alle $0 < r < \rho$. Dabei ist $\tilde{B}_r$ die geodätische Kugel vom Radius r . Da $\mu_\Sigma \longrightarrow \mu$, folgt

$$\mu(\tilde{B}_r(x)) \geq cr^{n-1} \quad \text{für alle } 0 < r < \rho$$

und insbesondere $x \in \text{spt } \Sigma$. Dies ist der gewünschte Widerspruch. ∎

Mit der zweiten Aussage im obigen 'Satz' ist die folgende innere Regularitätsaussage nun ein Standardschluß:

(4.3.2) *Konvergenz der* Σ_σ

Zu $x \in \text{spt } \Sigma$ existieren ein Radius $r = r(x) > 0$, ein $\sigma_0 = \sigma_0(x) > 0$, sowie für $\sigma \geq \sigma_0$ Funktionen

$$v_\sigma : \{X \in T_x\Sigma \mid \|X\| < r\} \to \mathbb{R}$$
$$v : \{X \in T_x\Sigma \mid \|X\| < r\} \to \mathbb{R} \quad ,$$

so daß folgendes gilt:

(1) $\exp_x$ bildet den Zylinder

$$\{X \in T_xM \mid \|p_{T_x\Sigma}X\| < r \quad , \quad |g(\nu_\Sigma(x),X)| < r\}$$

C^∞-diffeomorph auf eine Menge $V \subset M$ ab.

(2) $\text{spt } \Sigma_\sigma \cap V = \exp_x \quad (\text{graph } v_\sigma \subset T_xM)$

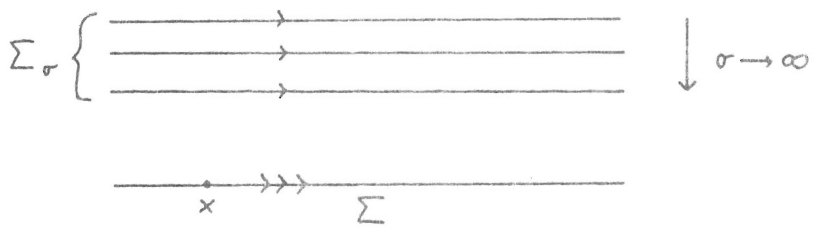
$\text{spt } \Sigma \cap V = \exp_x \quad (\text{graph } v \subset T_xM)$

(3) $\|v_\sigma\|_{C^3(T_x\Sigma)} \leq c(x,\phi)$.

Beweis: Da dies ein bekanntes Ergebnis der Geometrischen Maßtheorie ist, begnügen wir uns mit einer Beweisskizze. Zunächst bemerken wir, daß es ausreicht, die entsprechende Aussage mit einer $C^{1,\alpha}$-a-priori-Abschätzung einzusehen. Dann liefern nämlich die *inneren Schauderabschätzungen* [GT; Chapter 6] durch Interpretation der nichtparametrischen Minimalflächengleichung für die v_σ als

lineare elliptische Differentialgleichung die höhere Regularität.

Nun zitieren wir wieder die Regularitätsresultate der Geometrischen Maßtheorie [FH], etwa in der Version von [SS]. Zunächst ist aufgrund der lokalen Euklidizität von M klar, daß das Riemannsche Massenfunktional über die Exponentialabbildung lokal als $(n-1)$-*dimensionales, parametrisches Funktional* auf einer Umgebung des Nullpunkts in T_xM aufgefaßt werden kann und dann allen Voraussetzungen von [SS; § 1] genügt. Da spt Σ glatt ist, lassen sich die Behauptungen für spt Σ realisieren. Insbesondere können wir für Σ die Hypothese (H) aus [SS; § 1] erfüllen, und zwar wegen (4.3.1.2) mit der *Vielfachheit* $m = \ell = 1$. Beachten wir die Interpretation des *Exzesses* [SS; § 1 (13)], so sehen wir, daß aufgrund der Konvergenz der Radonmaße die Hypothese (H) für große σ auch von den Strömen Σ_σ erfüllt wird. Es ist dabei wesentlich, daß aufgrund der Konvergenz der Ströme die Vielfachheit $m = \ell$ aus (H) für genügend großes σ ebenfalls gleich Eins ist. Nun folgt die Aussage aus [SS; Regularity Theorem]. Wir weisen darauf hin, daß die Argumentation an einer Stelle *nichttrivial* ist: Hätte der Strom Σ in x eine Vielfachheit m größer als Eins, so ließe sich in der Hypothese (H) die Bedingung "$\theta^{n-1}(\mu_\sigma, y) \geq m$ für μ_σ-fast alle y nahe bei x mit $\ell = m$" nicht erreichen. Man könnte dann beispielsweise folgenden Fall nicht ausschließen:



Ab jetzt identifizieren wir den Strom Σ mit der orientierten Hyperfläche Σ. Wir wollen nun die Minimalflächengleichung für die Graphenfunktion aus (4.3.1)

$$u: H_0 \longrightarrow [-h_0,h_0]$$

als lineare elliptische Gleichung auf dem Außenraum H_0 auffassen.

(4.3.3) Lemma.

u ist eine Lösung der Differentialgleichung $a^{ij}(\xi)\,\partial^2_{ij}u(\xi) + b^i(\xi)\,\partial_i u(\xi) = f(\xi)$, wobei die Koeffizienten und die rechte Seite wie folgt gegeben sind:

$$a^{ij}(\xi) = \delta_{ij} - \frac{(\partial_i u)(\xi)(\partial_j u)(\xi)}{1+|\partial u(\xi)|^2} \qquad (1 \le i,j \le n-1)$$

$$b^i(\xi) = \frac{a}{2}\frac{\partial_i \varphi}{\varphi}(\xi,u(\xi))$$

$$f(\xi) = \frac{a}{2}\frac{\partial_n \varphi}{\varphi}(\xi,u(\xi)) \quad .$$

Beweis: Nach (1.2.14) gilt für die euklidische mittlere Krümmung H^0 von Σ bzgl. der euklidischen Normalen N

$$H^0(x) + \frac{a}{2}\frac{\partial_N \varphi}{\varphi} = 0 \quad .$$

Also ergibt sich aus (1.2.17), wenn wir

$$N(x) = \frac{1}{v(\xi)}(-\partial u(\xi),1) \quad , \quad v(\xi) = \sqrt{1+|\partial u(\xi)|^2}$$

wählen:

$$-\operatorname{div}_H\left(\frac{\partial u}{v}\right) + \frac{a}{2}\frac{\partial_N \varphi}{\varphi} = 0 \quad .$$

Multiplizieren wir die Differentialgleichung mit $(-v)$, so folgt:

$$\left(\delta_{ij} - \frac{(\partial_i u)(\partial_j u)}{v^2}\right)\partial^2_{ij}u - \frac{a}{2\varphi}\langle \partial\varphi,(-\partial u,1)\rangle = 0 \quad .$$

Dies ist die behauptete Form. ∎

(4.3.4) Lemma.

Seien a^{ij} , b^i , f die Daten aus (4.3.3). Dann gilt:

(1) $a^{ij} = \delta_{ij} + C^0_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha}(H_0)$ mit $\alpha = \frac{1}{n}$

(2) $b^i \in C^1_{1-\frac{1}{n}}{}^{\alpha}(H_0)$

(3) $f \in C^1_{1-\frac{1}{n}}{}^{\alpha}(H_0)$.

Falls $u \in C^{2,\alpha}_{\beta}(H_0)$, so gilt zusätzlich:

(4) $a^{ij} = \delta_{ij} + C^1_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha}(H_0)$.

Beweis: zu (1),(4):

Setze $A^{ij} = \frac{(\partial_i u)(\partial_j u)}{1+|\partial u|^2}$, also $a^{ij} = \delta_{ij} - A^{ij}$. Wir nehmen an, daß $\partial_i u \in C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha}$ für $k \in \{0,1\}$. Nach (2.1.6), (2.2.2) gilt dann:

$$(\partial_i u)(\partial_j u) \in C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} \quad , \quad (1+|\partial u|^2)^{-1} - 1 \in C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} \ .$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} A^{ij} &= (\partial_i u)(\partial_j u) + (\partial_i u)(\partial_j u)\left[(1+|\partial u|^2)^{-1} - 1\right] \\ &\in C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} + C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} \cdot C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} \subset C^k_{\frac{1}{2}}{}^{\alpha} \ . \end{aligned}$$

zu (2): Wir begründen zunächst die folgende *Hilfsaussage:*

(*) Ist $g \in C^2_\tau(M_\infty)$, so gilt

$$\tilde{g}(\xi) := g(\xi, u(\xi)) \in C^1_\tau{}^{\alpha}(H_0) \qquad (\tau \in \mathbb{R}) \ .$$

Beweis davon:

Aufgrund der Höhenschranke für u gilt

$$|\tilde{g}(\xi)| \le c|\xi|^\tau \ .$$

Wir berechnen:

$$(\partial_i \tilde{g})(\xi) = (\partial_i g)(\xi, u(\xi)) + (\partial_n g)(\xi, u(\xi))(\partial_i u)(\xi) \ .$$

Es folgt - wieder wegen $|u(\xi)| \leq h_0$ und $|\partial_i u(\xi)| \leq \frac{h_0+c_5}{|\xi|}$ (siehe (4.3.1)):

$$|\partial_i \tilde{g}(\xi)| \leq c|\xi|^{\tau-1} .$$

Seien jetzt noch $\xi, \overline{\xi} \in H_0$ mit $|\xi-\overline{\xi}| \leq \frac{1}{4}|\xi|$

$$\Rightarrow \quad |(\partial_i g)(\xi,u(\xi)) - (\partial_i g)(\overline{\xi},u(\overline{\xi}))|$$

$$\leq \text{höl}_\alpha \left((\partial_i g),(\xi,u(\xi))\right) \left\{|\xi-\overline{\xi}|^2 + |u(\xi)-u(\overline{\xi})|^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\leq C \|\partial^2 g\|_{C^0_{\tau-2}} |\xi|^{\tau-1-\alpha} \left\{1 + \text{Lip}(u)^2\right\}^{\frac{\alpha}{2}} |\xi-\overline{\xi}|^\alpha$$

$$\leq C \|g\|_{C^2_\tau(M_\infty)} \left\{1 + \|u\|_{C^{1,\alpha}_\delta}\right\} |\xi|^{\tau-1-\alpha} |\xi-\overline{\xi}|^\alpha .$$

Dies ergibt die Hilfsaussage (*).

Beachte nun $\varphi - 1 \in C^3_{2-n}(M_\infty)$. Wegen (2.2.2) folgt hieraus $\varphi^{-1} - 1 \in C^3_{2-n}(M_\infty)$ und somit wegen (*) $\varphi^{-1} \in C^{1,\alpha}_\delta(H_0)$. Ebenso haben wir wegen (*)

$$(\partial_i \varphi)(\xi,u(\xi)) \in C^{1,\alpha}_{1-n}(H_0)$$

$$\Rightarrow \quad b^i(\xi) = \frac{a}{2} C^{1,\alpha}_{1-n}(H_0) \cdot C^{1,\alpha}_\delta(H_0) \subset C^{1,\alpha}_{1-n} \qquad \text{(wegen (2.1.6))} .$$

zu (3): Wir benutzen nun die genauere Kenntnis von φ. Nach (4.0.1) gilt nämlich

$$(\partial_n \varphi)(\xi,u(\xi)) = \frac{(2-n)Au(\xi)}{|(\xi,u(\xi))|^n} + (\partial_n h)(\xi,u(\xi)) .$$

Aus (*) folgt:

$$|(\xi,u(\xi))|^{-n} \in C^{1,\alpha}_{-n}(H_0)$$

$$(\partial_n h)(\xi,u(\xi)) \in C^{1,\alpha}_{-n}(H_0) .$$

Nun ergibt sich $f(\xi) \in C^{1,\alpha}_{-n}(H_0)$ wie in (2).

(4.3.5) *Regularität von* Σ, *Teil 2*

Es existieren Konstanten $h_\infty \in \mathbb{R}$, $c_\infty \in \mathbb{R}$, so daß für alle $\epsilon \in (0,1)$ folgendes gilt:

Fall 1 $n = 3$

$$u(\xi) - h_\infty = u_1 \in C^{3,\alpha}_{-\epsilon}(H_0) \quad .$$

Fall 2 $4 \leq n \leq 7$

$$u(\xi) - \left(h_\infty + \frac{c_\infty}{|\xi|^{n-3}}\right) = u_1 \in C^{3,\alpha}_{3-n-\epsilon}(H_0) \quad .$$

Beweis: Wir wenden Satz (2.13) an, und zwar zunächst mit $k = 0$, $\epsilon \in (0,1)$. Beachte die Dimensionsverschiebung $n \hat{=} n - 1$. Wir erhalten die Behauptung zunächst mit $u_1 \in C^{2,\alpha}_{3-n-\epsilon}(H_0)$. Wegen (4.3.4.4) können wir nun (2.13) erneut anwenden mit $k = 1$. ∎

4.4 Stabilität von Σ

In diesem Abschnitt sei X ein festes Vektorfeld auf M mit $X \equiv \alpha e_n$ ($e_n = \frac{\partial}{\partial x^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$) auf E_R. Wir wollen die Stabilitätsungleichung (4.1.5) der Σ_σ auf die Grenzfläche Σ übertragen. Wir setzen $\mu = \nu^{n-1} \llcorner \Sigma$. Zunächst haben wir aus der Definition von Σ, und wegen (4.2.4), (4.3.1), (4.3.2), wenn wir mit b bzw. b_σ die Integranden der zweiten Variation bzgl. X auf Σ bzw. spt Σ_σ bezeichnen:

(4.4.1) Lemma.

Nach evtl. Auswahl einer Teilfolge gilt:

$$\int_K b \, d\mu = \lim_{\sigma \to \infty} \int_K b_\sigma \, d\mu_\sigma$$

für jede Menge $K \subset\subset M$.

Beweis: Sei $r > R_0$ beliebig. Da $\Sigma \cap \overline{M}_r$ kompakt ist, können wir $\Sigma \cap \overline{M}_r$ durch endlich viele Umgebungen des Typs aus (4.3.2) überdecken. Nach Arzéla-Ascoli

existiert eine (von R abhängige) Teilfolge $\{\sigma'\}$, so daß die entsprechenden Graphenfunktionen in der C^2-Norm konvergieren. Da die Vielfachheiten der Ströme Σ_σ identisch Eins sind ((4.2.4)) für σ' groß genug, folgt die Behauptung für die Teilfolge σ' und jedes $K \subset \overline{M}_r$. Wähle nun $r_k = k \in \mathbb{N}$, und bilde die Diagonalfolge bei $k \to \infty$. ∎

(4.4.2) Lemma.

Es existiert eine Konstante $c_6 = c_6(\phi)$, so daß für $|\xi| > R$ gilt:

$$|b_\sigma(x)| \leq \frac{c_6}{|\xi|^n} \quad , \quad |b(x)| \leq \frac{c_6}{|\xi|^n} \; .$$

Beweis: Wir betrachten o.B.d.A. den Fall $X \equiv e_n$ für $|x| > R$. Sei f_t der Fluß von X, das heißt für $|\xi| > R$: $f_t(x) = x + te_n$.

Für das Beschleunigungsfeld der Variation folgt $Z(x) = \frac{De_n}{\partial t}(0)$

$$\Rightarrow \quad \text{(i)} \qquad Z = \frac{p-2}{2\varphi}\left\{2(\partial_n\varphi)e_n - \partial\varphi\right\} \qquad \text{(mit (1.1.5))} \; .$$

Wir bezeichnen nun (innerhalb dieses Beweises) die Zusammenhangskomponente von x in $\operatorname{spt}\Sigma_\sigma$ (bzw. Σ) mit Σ. Sei $\{\tau_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ eine euklidische Orthonormalbasis von Σ, und N die euklidische Normale an Σ. Die entsprechenden Riemannschen Größen sind dann

$$\left\{\tilde{\tau}_i = \varphi^{1-\frac{p}{2}}\tau_i \mid 1 \leq i \leq n-1\right\} \quad , \quad \nu = \varphi^{1-\frac{p}{2}}N \; .$$

Wir müssen die einzelnen Terme aus (1.3.2.2) berechnen. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle = \delta$ die euklidische Metrik mit Betrag $|\cdot|$. Gemäß (1.1.5) berechnen wir für ein Vektorfeld Y:

$$\begin{aligned} g(D_{\tilde{\tau}_i}Y,\tilde{\tau}_j) &= \varphi^{2-p}\, g(D_{\tau_i}Y,\tau_j) \\ &= \langle\partial_{\tau_i}Y,\tau_j\rangle + \frac{p-2}{2\varphi}\left\{\langle\partial\varphi,\tau_i\rangle\langle\tau_j,Y\rangle + \langle\partial\varphi,Y\rangle\,\delta_{ij} - \langle\partial\varphi,\tau_j\rangle\langle\tau_i,Y\rangle\right\} \end{aligned}$$

Als erstes verwenden wir $Y = e_n$:

(ii) $$g(D_{\tilde{\tau}_i} e_n, \tilde{\tau}_j) = \frac{p-2}{2\varphi} \left\{ \langle \partial\varphi, \tau_i \rangle \langle \tau_j, e_n \rangle + \langle \partial\varphi, \tau_j \rangle \langle \tau_i, e_n \rangle + \langle \partial\varphi, e_n \rangle \, \delta_{ij} \right\} .$$

Ähnlich folgt:

(iii) $$g(D_{\tilde{\tau}_i} e_n, \nu) = \frac{p-2}{2\varphi} \left\{ \langle \partial\varphi, \tau_i \rangle \langle e_n, N \rangle - \langle \tau_i, e_n \rangle \langle \partial\varphi, N \rangle \right\} .$$

Nun verwenden wir die Formel (1.2.15) für die tangentiale Divergenz:

$$\operatorname{div}^T Y = \tilde{\operatorname{div}}^T Y + \frac{a}{2} \frac{\langle \partial\varphi, Y \rangle}{\varphi} .$$

Dabei ist $\tilde{\operatorname{div}}^T$ die euklidische tangentiale Divergenz.

$\Rightarrow$ (iv) $$\operatorname{div}^T e_n = \frac{a}{2} \frac{\langle \partial\varphi, e_n \rangle}{\varphi} .$$

Wir benötigen auch die Divergenz von Z:

$$\operatorname{div}^T Z = \sum_i \left\langle \partial_{\tau_i} \left(\frac{p-2}{2\varphi} \left(2 \langle \partial\varphi, e_n \rangle e_n - \partial\varphi \right) \right), \tau_i \right\rangle + \frac{a}{2\varphi} \left\langle \partial\varphi, \frac{p-2}{2\varphi} \left(2 \langle \partial\varphi, e_n \rangle e_n - \partial\varphi \right) \right\rangle .$$

Ausrechnen ergibt ($a = p + 2$):

(v) $$\begin{aligned} \operatorname{div}^T Z = {} & \frac{p-2}{2\varphi} \sum_i + 2\, \partial^2\varphi(\tau_i, e_n) \langle e_n, \tau_i \rangle - \partial^2\varphi(\tau_i, \tau_i) \\ & - \frac{p-2}{2\varphi^2} \sum_i \langle \partial\varphi, \tau_i \rangle \left(2 \langle \partial\varphi, e_n \rangle \langle e_n, \tau_i \rangle - \langle \partial\varphi, \tau_i \rangle \right) \\ & + \frac{p^2-4}{4\varphi^2} \left(2 \langle \partial\varphi, e_n \rangle^2 - |\partial\varphi|^2 \right) . \end{aligned}$$

Anstatt dies weiter umzuformen, wenden wir uns dem Krümmungsterm zu. Nach (2.1.9) gilt für den Krümmungstensor R von g:

(vi) $$R = \frac{p-2}{2} \varphi^{p-3} \left(\frac{p-2}{4\varphi} |\partial\varphi|^2 \, \delta + \partial^2\varphi - \frac{p}{2\varphi} \partial\varphi \otimes \partial\varphi \right) \otimes \delta .$$

Die Formel für den Integranden der zweiten Variation lautet:

$$b(x) = \operatorname{div}^{\top} Z + (\operatorname{div}^{\top} e_n)^2 + \sum_i g(D_{\tilde{\tau}_i} e_n, \nu)^2$$
$$- \sum_{i,j} g(D_{\tilde{\tau}_i} e_n, \tilde{\tau}_j)\, g(D_{\tilde{\tau}_j} e_n, \tilde{\tau}_i) - \sum_i R(\tilde{\tau}_i, e_n, e_n, \tilde{\tau}_i) \quad .$$

Setzen wir in Gedanken die Formeln (i) - (vi) ein, so sind die resultierenden Terme von zweierlei Art: entweder $\varphi^{\text{Potenz}} \cdot$ linearer Term in $\partial^2\varphi$

oder $\varphi^{\text{Potenz}} \cdot$ quadratischer Term in $\partial\varphi$.

Da $|\partial\varphi(x)| \leq \frac{c(A, c_1, h_0, R_0)}{|\xi|^{n-1}}$

$$|\partial^2\varphi(x)| \leq \frac{c(A, c_1, h_0, R_0)}{|\xi|^{n}}$$

folgt somit die behauptete Existenz der Konstanten $c_6(\varphi)$. ∎

(4.4.2) *Stabilität von* Σ , *Teil 1*

Sei X ein Vektorfeld wie oben, und b der Integrand der zweiten Variation bzgl. X auf Σ . Dann gilt $b \in L^1(\Sigma)$ und

$$\int_\Sigma b \, dv^{n-1} \geq 0 \quad .$$

Beweis: Sei τ_0 die Konstante aus (4.2.3). Dann gilt für $\tau > \tau_0$.

$$\int_{\{|\xi| \geq \tau\}} |\xi|^{-n} \, d\mu_\sigma$$

$$\leq \int_{\{|\xi| \geq \tau\}} |\xi|^{-n} \, d\lambda_\sigma \qquad (\lambda_\sigma = \chi^{n-1} \llcorner \theta_\sigma \text{ , siehe (4.0.3.2), (4.2)})$$

$$\leq \int_{\{\tau \leq |\xi| < \frac{2}{3}\sigma\}} |\xi|^{-n} \sqrt{1 + |\partial u_\sigma|^2} \, d\mathcal{L}^{n-1}(\xi) \qquad \text{(wegen (4.2.3))}$$
$$+ \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \sigma^{-n} \lambda_\sigma \{|\xi| \geq \tfrac{2}{3}\sigma\}$$

$$\leq c(n, c_5) \int_\tau^\infty t^{-2} \, dt \qquad \text{(wegen (4.1.8), (4.2.3))}$$
$$+ \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \sigma^{-n} \left(\tfrac{4}{3} \mathcal{L}^{n-1}\{\xi | \tfrac{2}{3}\sigma \leq |\xi| \leq \sigma\} + c_3\right)$$

$$\leq \frac{c(n, c_5)}{\tau} + \frac{c(n, c_3)}{\sigma} \quad .$$

Ebenso folgt

$$\int_{\{|\xi| \geq \tau\}} |\xi|^{-n} \, d\mu \leq \frac{c(n, c_5)}{\tau} \qquad (\mu = \nu^{n-1} \llcorner \Sigma) \quad .$$

Insbesondere ist $|\xi|^{-n} \in L^1(\Sigma)$, und damit auch $b \in L^1(\Sigma)$. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $\tau \geq \tau_0$ so groß, daß gilt:

$$\frac{c(n, c_5)}{\tau} \leq \frac{\epsilon}{2c_6} \quad .$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int b \, d\mu &= \int_{\{|\xi| \leq \tau\}} b \, d\mu + \int_{\{|\xi| > \tau\}} b \, d\mu \\
&\geq \lim_{\sigma \to \infty} \int_{\{|\xi| \leq \tau\}} b_\sigma \, d\mu_\sigma - \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{(wegen (4.4.1), (4.4.2))} \\
&\geq \liminf_{\sigma \to \infty} \left(\int b_\sigma \, d\mu_\sigma - \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{c(n, c_3)}{\sigma} \right) \right) - \frac{\epsilon}{2} \\
&\geq \liminf_{\sigma \to \infty} \left(\int b_\sigma \, d\mu_\sigma \right) - \epsilon \\
&\geq -\epsilon \qquad \text{(wegen (4.1.5))} \quad .
\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig wählbar ist, folgt $\int b \, d\mu \geq 0$. ∎

Ab jetzt arbeiten wir nur noch mit der Fläche Σ.

(4.4.3) **Lemma.**

Sei X wieder ein Vektorfeld wie oben. Setze $D_\sigma = \{x \in \Sigma \mid |\xi| < \sigma\}$. Sei $c(x)$ der *Randintegrand* in der Formel (1.3.9) für die zweite Variation bzgl. X und $\partial D_\sigma \subset \Sigma$. Dann gilt:

$$\lim_{\sigma \to \infty} \int_{\partial D_\sigma} c \, d\nu^{n-2} = 0 \quad .$$

Beweis: Wir nehmen wieder o.B.d.A. $X \equiv e_n$ für $|\xi| \geq r$ an. Sei η die äußere, Riemannsche Normale an ∂D_σ in Σ, und die Normale ν sei nach oben zeigend für $|\xi| > \tau_0$. Dann gilt für $|\xi| \geq \max\{\tau_0, r\}$:

$$c = g(Z,\eta) + (\mathrm{div}^\top e_n)\, g(e_n,\eta) - g(D_{e_n^\top} e_n^\top, \eta) - 2g(e_n,\nu)\, \ell(e_n^\top,\eta) \ .$$

Wir schätzen die einzelnen Terme durch die richtige Potenz von $\sigma = |\xi|$ ab. Das Beschleunigungsfeld Z der durch $X = e_n$ definierten Variation ist gegeben durch (4.4.1):

$$Z = \frac{p-2}{2\varphi}\left\{2\,\langle \partial\varphi, e_n\rangle\, e_n - \partial\varphi\right\} \ .$$

Es folgt:

(i) $\qquad g(Z,\eta) = \mathcal{O}(|\partial\varphi|)$.

Ferner gilt $\mathrm{div}^\top e_n = \frac{a}{2}\,\frac{\langle \partial\varphi, e_n\rangle}{\varphi}$

$\Rightarrow$ (ii) $\qquad (\mathrm{div}^\top e_n)\, g(e_n,\eta) = \mathcal{O}(|\partial\varphi|)$.

Nach (1.2.13) und (1.2.16) berechnen wir

$$\begin{aligned}\ell(e_n^\top,\eta) &= \varphi^{\frac{p}{2}-1}\left[\ell_\delta(e_n^\top,\eta) + \frac{p-2}{2\varphi}\,\langle e_n,\eta\rangle\,\langle \partial\varphi, N\rangle\right] \\ &= \varphi^{\frac{p}{2}-1}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+|\partial u|^2}}\,\partial^2 u(\overline{e}_n^\top,\overline{\eta}) + \frac{p-2}{2\varphi}\,\langle e_n,\eta\rangle\,\langle \partial\varphi, N\rangle\right]\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (iii) $\qquad g(e_n,\nu)\,\ell(e_n^\top,\eta) = \mathcal{O}(|\partial^2 u| + |\partial\varphi|)$.

Zu guter letzt untersuchen wir den dritten Term in c : Mit (1.1.5) haben wir

$$\begin{aligned}D_{e_n^\top} e_n^\top &= \partial_{e_n^\top} e_n^\top + \frac{p-2}{2\varphi}\left\{2\,\langle \partial\varphi, e_n^\top\rangle\, e_n^\top - |e_n^\top|^2\,\partial\varphi\right\} \\ \partial_{e_n^\top} e_n^\top &= -\partial_{e_n^\top} e_n^\perp \\ &= -\partial_{e_n^\top}(\langle e_n, N\rangle\, N) \qquad\qquad \text{(N euklidische Normale)}\end{aligned}$$

$$= -\ell_\delta(e_n^\tau, e_n^\tau)\, N - \langle e_n, N\rangle\, S_\delta\, e_n^\tau \qquad (S_\delta = \text{Weingartenabb.})$$

$$\Rightarrow \qquad \langle \partial_{e_n^\tau} e_n^\tau, \eta\rangle = -\ell_\delta(e_n^\tau, e_n^\tau)\, \langle N., \eta\rangle - \langle e_n, N\rangle\, \ell_\delta(e_n^\tau, \eta)$$

$$\Rightarrow \text{(iv)} \qquad g(D_{e_n^\tau} e_n^\tau, \eta) = \mathcal{O}(|\partial^2 u| + |\partial\varphi|) \quad .$$

Nun gilt wegen (4.3.5) und (4.0.1):

$$|\partial\varphi| \leq c(A, c_1, h_0, R_0)\, |\xi|^{1-n}$$

$$|\partial^2 u| \leq c \begin{cases} |\xi|^{-2-\varepsilon} & , \text{ falls } n = 3 \quad (\varepsilon \in (0,1)) \\ |\xi|^{1-n} & , \text{ falls } n \geq 4 \end{cases} .$$

Somit gilt $|c(x)| \leq c|\xi|^{1-n}$. Andererseits ist aber

$$\nu^{n-2}(\partial D_\sigma) \leq \chi^{n-2}(\partial D_\sigma) \qquad \text{(wegen (4.0.3.2))}$$

$$\leq \int_{S(\sigma,0)} \sqrt{1+|\partial u|^2}\, d\chi^{n-2} \leq c\sigma^{n-2} \quad .$$

Folglich konvergieren die Integrale über c gegen Null. ∎

(4.4.4) **Lemma.**

Sei $\psi \in C^1(\Sigma)$. Es gebe eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß in der durch die Projektion auf H definierten Karte gilt:

$$\begin{cases} \psi - \alpha \in C^1_{3-n}(H_0) & \text{für } n \geq 4 \\ \psi - \alpha \in C^1_c(H_0) & \text{für } n = 3 \end{cases} .$$

Dann folgt:

$$\int_\Sigma \|\nabla\psi\|^2\, d\nu^{n-1} \geq \int_\Sigma \psi^2 \left\{ \|\ell\|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) \right\} d\nu^{n-1} \quad .$$

Beweis: Wir dürfen wieder $\alpha = 1$ annehmen. Wegen (4.4.2) und (4.4.3) haben wir die Ungleichung bereits für alle $\chi \in C^1(\Sigma)$ zur Verfügung, für die gilt:

$$\chi(x) \equiv g(e^n,\nu) = \frac{\varphi^{\frac{n}{2}-1}(x)}{\sqrt{1+|\partial u(\xi)|^2}} \quad \text{für} \quad |\xi| >> 1 \quad .$$

Aufgrund der Voraussetzungen an φ und den asymptotischen Aussagen über u ergibt sich mit denselben Methoden wie in (4.3.4):

$$\varphi^{\frac{n}{2}-1}(\xi,u(\xi)) = 1 + C^1_{\frac{1}{2}-n}(H_0)$$

$$(1+|\partial u|^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + C^1_{\frac{1}{2}(2-n)}(H_0)$$

$$\Rightarrow \quad \text{(i)} \qquad \chi(\xi,u(\xi)) = 1 + C^1_{\frac{1}{2}-n}(H_0) \quad .$$

Wir nehmen nun zunächst an, daß $\psi - \alpha$ kompakten Träger hat. Sei $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Abschneidefunktion mit

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad t \geq 2 \end{cases} \quad .$$

Setze $\eta_R(\xi) = \eta(\frac{|\xi|}{R})$ und notiere

$$\text{(ii)} \qquad \|\eta_R\|_{C^1_0(H_0)} \leq C \qquad \text{(unabhängig von R)} \quad .$$

Sei r so, daß $\text{spt}(f-\alpha) \subset \{x \in \Sigma \mid |\xi| < r\}$, und $R \geq r$. Wir bilden die interpolierenden Funktionen

$$\psi_R(x) = \eta_R(\xi)\,\psi(x) + (1-\eta_R(\xi))\,\chi(x) \quad .$$

In einem Punkt $x \in \Sigma$ mit $|\xi| > r$ gilt dann:

$$\nabla\psi_R = (\nabla\eta_R)(1-\chi) + (1-\eta_R)\,\nabla\chi \quad .$$

Beachten wir, daß die euklidische und die Riemannsche Norm gegeneinander abgeschätzt sind, so folgt für diese x :

$$\|\nabla\psi_R\|^2 \le \|\nabla\eta_R\|^2 (1-\chi)^2 + \|\nabla\chi\|^2 + 2|1-\chi|\,\|\nabla\eta_R\|\,\|\nabla\chi\|$$
$$\le \frac{C}{|\xi|^{2(n-1)}} \qquad (c = c(\tilde{R})) \ .$$

Wegen $2(n-1) > n-1$ besitzt also $\|\nabla\psi_R\|^2$ eine Majorante, so daß die linke Seite der Behauptung konvergiert. Um entsprechendes für die rechte Seite nachzuweisen, müssen wir nur zeigen, daß $\|\ell\|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu)$ integrierbar ist. Nun gilt wegen (1.2.13) und (1.2.16):

$$\ell(X,Y) = \varphi^{\frac{p}{2}-1}\left[-\frac{1}{\sqrt{1+|\partial u|^2}}\,\partial^2 u(\overline{X},\overline{Y}) + \frac{p-2}{2\varphi}\,\langle X,Y\rangle\,\langle\partial\varphi,N\rangle\right] ,$$

wobei N die euklidische Normale an Σ bezeichnet.

$$\Rightarrow \quad \text{(iii)} \qquad \|\ell\|^2(x) \le \frac{c}{|\xi|^{2(n-1)}} \ .$$

Weiter ergibt die Formel (1.1.10) für die Umrechnung der Riccikrümmung

$$\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{2}{\varphi}\left\{\frac{p}{2\varphi}\,\langle\partial\varphi,\nu\rangle^2 - \partial^2\varphi(\nu,\nu)\right\} + \frac{p-2}{2\varphi}\left\{\Delta_\delta\varphi - \frac{|\partial\varphi|^2}{\varphi}\right\}|\nu|^2$$

$$\Rightarrow \quad \text{(iv)} \quad |\mathrm{Ric}(\nu,\nu)| \le \frac{c}{|\xi|^n} \ .$$

Damit ist die Behauptung gezeigt für alle ψ mit $\mathrm{spt}(\psi-\alpha) \subset\subset \Sigma$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Sei nun $n \ge 4$, und ψ wie in der Behauptung, o.b.d.A. mit $\alpha = 1$. Wir bilden die Funktionen

$$\psi_R = \eta_R\psi + (1-\eta_R)$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla\psi_R = \eta_R\nabla\psi + \nabla\eta_R(\psi-1)$$

$$\Rightarrow \qquad \|\nabla\psi_R\|^2 \le \eta_R^2\,\|\nabla\psi\|^2 + \|\nabla\eta_R\|^2\,(\psi-1)^2 + 2|\psi-1|\,\|\nabla\eta_R\|\,\|\nabla\psi\| \ .$$

Wir folgern wie oben aus den Voraussetzungen an ψ

$$\|\nabla\psi_R\|^2 \le \frac{c}{|\xi|^{2(n-2)}} \qquad (c = c(\tilde{R})) \ .$$

Für $n \geq 4$ ist aber $2n-4 > n-1$ und folglich ergibt sich die Behauptung wieder aus dem Satz über dominierte Konvergenz. ∎

Wir weisen darauf hin, daß sich im Fall $n \geq 4$ obige Aussage *nicht* aus der Stabilitätsungleichung auf Σ für *kompakte Variationen* folgern läßt. Insofern war die zusätzliche Stabilitätseigenschaft der Plateaulösungen wesentlich. Man vergleiche hierzu auch die Bemerkung von Giusti zum Beweis des Satzes von Bernstein mit einer Stabilitätsungleichung [GE; 17.2 und nachfolgende Bemerkung].

(4.4.5) *Stabilität von* Σ, *Teil 2*

Sei $\psi \in C^1(\Sigma)$ nicht identisch Null. Es gebe eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß gilt:

$$\begin{cases} \psi - \alpha \in C^1_{3-n}(H_0) & \text{für } n \geq 4 \\ \psi - \alpha \in C^1_c(H_0) & \text{für } n = 3 \end{cases}$$

Dann folgt aus der Voraussetzung $S_M > 0$ von(4.0.1):

$$\int_\Sigma \left(\|\nabla\psi\|^2 + \frac{1}{2} S_\Sigma \, \psi^2 \right) dv^{n-1} > 0 \; .$$

Beweis: Da Σ Minimalfläche ist, gilt nach (1.2.10)

$$\|\ell\|^2 + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{1}{2} \left(S_M - S_\Sigma + \|\ell\|^2 \right) \; .$$

$\|\ell\|^2$ und $\mathrm{Ric}(\nu,\nu)$ sind über Σ integrierbar. Ferner gilt nach (1.1.11) für $|x| > R_0$:

$$S_M = a\varphi^{1-p} \Delta_\delta \varphi = \mathcal{O}(|\xi|^{-n-1}) \; .$$

Folglich sind in obiger Gleichung alle Terme integrierbar, und nach Umstellen erhalten wir aus (4.4.4):

$$\int_\Sigma \left(\|\nabla\psi\|^2 + \frac{1}{2} S_\Sigma \, \psi^2 \right) dv^{n-1} \geq \frac{1}{2} \int_\Sigma \left(\|\ell\|^2 + S_M \right) \psi^2 \, dv^{n-1} > 0 \; . \qquad ∎$$

4.5 Herbeiführung des Widerspruchs

Sei zunächst $n = 3$, und $S_\sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| = \sigma\}$. Sei

$$c(\omega) = \sigma\left(\cos\frac{\omega}{\sigma}, \sin\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

die Parametrisierung von S_σ nach der euklidischen Bogenlänge. Wir setzen $e_r(\omega) = \frac{1}{\sigma} c(\omega)$ und

$$\tilde{c}(\omega) = \left(c(\omega), u(c(\omega))\right) \quad .$$

$\tilde{c}$ ist eine Parametrisierung des Randes von $D_\sigma = \{x \in \Sigma \mid |\xi| < \sigma\}$. Sie $\eta = \eta(\omega)$ die nach außen weisende Riemannsche Normale an ∂D_σ in Σ. Wir bezeichnen mit κ_g die *geodätische Krümmung* von ∂D_σ in Σ bzgl. der Normalen η und der Riemannschen Metrik g.

(4.5.1) Lemma.

Es gilt $$\lim_{\sigma\to\infty} \int_{\partial D_\sigma} \kappa_g \, dv^1 = 2\pi .$$

Beweis: Wir berechnen zunächst die euklidische geodätische Krümmung κ_ξ von ∂D_σ bzgl. der euklidischen Normalen $\tau = \varphi^{\frac{n}{2}-1}\eta$. Sei e der euklidische Einheitstangentenvektor an ∂D_σ. Dann gilt:

$$e = \frac{(c', \partial_\omega u)}{\sqrt{1+(\partial_\omega u)^2}} \qquad \tau = \frac{(e_r, \partial_r u) - \langle (e_r, \partial_r u), e\rangle e}{\left|\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right|} \quad .$$

Ausrechnen der Norm liefert für τ:

$$\tau = \sqrt{\frac{1+(\partial_\omega u)^2}{1+|\partial u|^2}} \left(e_r - \frac{(\partial_r u)(\partial_\omega u)}{1+(\partial_\omega u)^2} c', \frac{\partial_r u}{1+(\partial_\omega u)^2}\right) \quad .$$

Bezeichne mit "$\perp$" die zu ∂D_σ normale Komponente eines Vektors in $T_x\Sigma$. Es ergibt sich:

$$(\partial_e e)^\perp = \frac{1}{1+(\partial_\omega u)^2}(\partial_{\tilde{c}},\tilde{c}')^\perp = \frac{1}{1+(\partial_\omega u)^2}\left(-\frac{1}{\sigma}e_r\,,\ \partial^2_{\omega,\omega}u\right)^\perp$$

$$\Rightarrow \qquad \kappa_g(\omega) = -\langle \partial_e e, \tau\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1+|\partial u|^2)(1+(\partial_\omega u)^2)}}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{(\partial_r u)(\partial^2_{\omega,\omega}u)}{1+(\partial_\omega u)^2}\right) .$$

Beachte nun, daß mit (4.3.5) gilt (wähle $\epsilon = \frac{1}{2}$) :

$$|\partial u(\xi)|^2 \le \frac{c}{|\xi|^3}\ , \quad |\partial^2 u(\xi)| \le \frac{c}{|\xi|^{5/2}} .$$

Somit haben wir nach Lemma (2.2.2):

$$\kappa_g(\omega) = \frac{1}{\sigma} + \mathcal{O}(\frac{1}{\sigma^3}) .$$

Sei nun $\tilde{e} = \varphi^{1-\frac{p}{2}}e$ und $\eta = \varphi^{1-\frac{p}{2}}\tau$. Dann gilt wegen (1.1.5):

$$\kappa_{\tilde{g}} = -g(D_{\tilde{e}}\tilde{e},\eta)$$

$$= -\varphi^{1-\frac{p}{2}}\langle D_e e,\tau\rangle$$

$$= \varphi^{1-\frac{p}{2}}\left\{\kappa_g + \frac{p-2}{2\varphi}\langle\partial\varphi,\tau\rangle\right\} .$$

Jetzt beachten wir noch

$$dv^1(\omega) = \varphi^{\frac{p}{2}-1}\,d\chi^1(\omega)$$

$$= \varphi^{\frac{p}{2}-1}\sqrt{1+(\partial_\omega u)^2}\,d\omega .$$

Wegen $\partial\varphi(x) = \mathcal{O}(|\xi|^{-2})$ folgt also

$$\kappa_g(\omega)\,dv^1(\omega) = \left(\frac{1}{\sigma} + \mathcal{O}(\frac{1}{\sigma^2})\right)d\omega ,$$

wobei die Abschätzung natürlich gleichmäßig in ω ist. Insgesamt ergibt sich

$$\int_{\partial D_\sigma}\kappa_g\,dv^1 = 2\pi + \mathcal{O}(\frac{1}{\sigma}) . \qquad \blacksquare$$

Wir sind jetzt in der Lage, das 1979 von Schoen und Yau [SY1] bewiesene Resultat zu folgern:

(4.5.2) Beweis des Positive Energy Theorem (3.6.1) für $n = 3$:

Wir zeigen, daß die Existenz von Σ dem Satz von Gauß-Bonnet widerspricht. Dazu wählen wir in (4.4.5) $\psi \equiv 1$:

$$\int_\Sigma \left(\frac{1}{2} S_\Sigma\right) dv^2 \geq 0 \quad .$$

Andererseits gilt nach dem Satz von Gauß-Bonnet [dCM]:

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} S_\Sigma\right) dv^2 &= \lim_{\sigma \to \infty} \int_{D_\sigma} \left(\frac{1}{2} S_\Sigma\right) dv^2 \\ &= \lim_{\sigma \to \infty} \left\{ 2\pi \chi(D_\sigma) - \int_{\partial D_\sigma} \kappa_g \, dv^1 \right\} \\ &= 2\pi (\chi(\Sigma) - 1) \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt, weil für $\sigma >> 1$ Σ auf D_σ deformationsretrahiert werden kann, und natürlich wegen (4.5.1). Nun ist die Eulercharakteristik der offenen Fläche Σ höchstens Eins [AS], also folgt $\int_\Sigma \frac{1}{2} S_\Sigma \, dv^2 \leq 0$. Dies ist der gewünschte Widerspruch. ∎

Sei nun $4 \leq n \leq 7$. Die Metrik g - eingeschränkt auf Σ - fällt zwar gegen die euklidische Metrik ab, besitzt im allgemeinen aber keine nichtnegative Skalarkrümmung. Um ein induktives Argument führen zu können, ist es naheliegend, in der Konformklasse von $g|_\Sigma$ eine Metrik zu suchen, deren Skalarkrümmung zum Beispiel identisch verschwindet. Die nach Satz (2.9.4) dazu benötigte Injektivität des konformen Laplaceoperators ist nicht trivial; sie ergibt sich aber durch einen *Vergleich der Eigenwerte des konformen Laplaceoperators und des Stabilitätsoperators* der minimalen Hyperfläche Σ.

(4.5.3) Lemma.

Die Projektion auf H definiert auf Σ ein Koordinatensystem, bzgl. dessen die Metrik $\bar{g} = g|_\Sigma$ folgende Gestalt hat:

$$\bar{g}_{ij} = \delta_{ij} + C^{2,\alpha}_{2-n}(H_0) \qquad (\alpha = \frac{1}{n}) \quad .$$

Beweis: Wir haben

$$\bar{g}_{ij}(\xi) = \varphi(\xi,u(\xi))^{p-2}\,(\delta_{ij} + (\partial_i u)(\xi)(\partial_j u)(\xi)) \quad .$$

Mit denselben Methoden wie in (4.3.4) ergibt sich

$$\varphi(\xi,u(\xi))^{p-2} = 1 + C^{2,\alpha}_{2-n}(H_0) \quad .$$

Andererseits gilt wegen (4.3.5)

$$\partial_i u(\xi) \in C^{2,\alpha}_{2-n}(H_0) \quad . \qquad \blacksquare$$

(4.5.4) *Konformer Wechsel zu Skalarkrümmung Null*

Sei $\bar{L} = 4\,\frac{n-2}{n-3}\,\Delta_{\bar{g}} + S_\Sigma$ der konforme Laplaceoperator von Σ. Es existiert eine Funktion $\psi \in C^\infty(\Sigma)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) ψ ist eine Lösung der Differentialgleichung $\bar{L}\psi = 0$;

(2) $\psi(\xi) = 1 + \frac{\bar{A}}{|\xi|^{n-3}} + C^{2}_{3-n-\epsilon}(H_0)$ für ein $\bar{A} \in \mathbb{R}$ und ein $\epsilon > 0$;

(3) ψ ist strikt positiv.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1(\Sigma)$, so daß $f - \alpha \in C^1_{3-n}(H_0)$. Aufgrund der Stabilität (4.4.5) von Σ gilt, wenn f nicht identisch verschwindet:

$$\int_\Sigma \left(\|\nabla f\|^2 + \frac{1}{2}\,S_\Sigma\, f^2 \right) dv^{n-1} > 0$$

$$\Rightarrow \text{(i)} \qquad \int_\Sigma \left(4\,\frac{n-2}{n-3}\,\|\nabla f\|^2 + S_\Sigma\, f^2 \right) dv^{n-1} > 2\,\frac{n-1}{n-3} \int_\Sigma \|\nabla f\|^2\, dv^{n-1} \quad .$$

Wir betrachten nun den Operator

$$\text{(ii)} \qquad \overline{L}\colon W^{2,q}_{\mu} \to W^{0,q_2}_{\mu} \qquad (q > n-1\,,\ 0 < \mu < n-3)\ ,$$

wobei die gewichteten Räume bzgl. der durch die Projektion auf H_0 gegebenen Karte definiert sind. Nach Lemma (2.7) ist $\overline{L}$ asymptotisch zu $4\frac{n-2}{n-3}\Delta_{\mathbb{R}^{n-1}}$ mit jeder Rate $\tau \in (0,n-2)$ wegen Lemma (4.5.3).

Angenommen, es existiert eine Lösung $f \in W^{2,q}_{\mu}$ von $\overline{L}f = 0$, die nicht identisch Null ist. Wählen wir beispielsweise $\tau = \frac{3}{2}$, so folgt aus Satz (2.10) die Existenz eines $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f - \frac{c}{|\xi|^{n-3}} \in W^{2,q}_{2-n} \subset C^1_{2-n} \quad \text{(letzteres nach (2.1.4))}\ .$$

Sei nun $\sigma >> 1$, und $D_\sigma = \{x \in \Sigma \mid |\xi| < \sigma\}$. Dann gilt, wenn wir mit η die äußere Normale an ∂D_σ in Σ bezeichnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_\sigma} (\overline{L}f)\, f\, dv^{n-1} \\ &= \int_{D_\sigma} \left(4\frac{n-2}{n-3} \|\nabla f\|^2 + S_\Sigma f^2 \right) dv^{n-1} - 4\frac{n-2}{n-3} \int_{\partial D_\sigma} f(\partial_\eta f)\, dv^{n-2}\ . \end{aligned}$$

Nun ist $f(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^{3-n})$, $\partial_\eta f = \mathcal{O}(|\xi|^{2-n})$ und $v^{n-2}(\partial D_\sigma) = \mathcal{O}(\sigma^{n-2})$. Da $n \geq 4$, verschwindet also bei $\sigma \to \infty$ der Randterm und wir erhalten aus (i) einen Widerspruch. Somit ist die Injektivität des Operators aus (ii) nachgewiesen. Beachte nun, daß wegen (4.5.3) und (2.5) gilt: $S_\Sigma \in C^{0,\alpha}_{-n}$ (mit $\alpha = \frac{1}{n}$). Insbesondere erhalten wir mit Satz (2.9.4) die Existenz einer Lösung $\psi_1 \in W^{2,q}_{\mu}$ der Differentialgleichung $\overline{L}\psi_1 = -S_\Sigma$. Anwendung von Satz (2.10) liefert

$$\psi_1(\xi) = \frac{\overline{A}}{|\xi|^{n-3}} + W^{2,q}_{3-n-\varepsilon} \qquad \text{für ein } \varepsilon > 0\ ,\ \overline{A} \in \mathbb{R}\ .$$

Dies kann mit Satz (2.11) verbessert werden zu

$$\psi_1(\xi) = \frac{\overline{A}}{|\xi|^{n-3}} + C^2_{3-n-\varepsilon}\ .$$

Also erfüllt die Funktion $\psi = 1 + \psi_1$ die Behauptungen (1) und (2), und es bleibt zu zeigen, daß ψ strikt positiv ist.

Dazu betrachten wir den negativen Anteil von ψ:

$$\psi_-(x) = \min\{0, \psi(x)\} \quad .$$

ψ_- hat kompakten Träger, und es gilt [GT; 7.6]:

$$\psi_- \in W_c^{1,2}(\Sigma) \quad , \quad \nabla\psi_- = \chi_{\{\psi<0\}}\nabla\psi \qquad (v^{n-1}\text{-fast-überall}) \quad .$$

Einsetzen von ψ_- als Testfunktion ergibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma (\bar{L}\psi)\,\psi_-\, dv^{n-1} \\ &= \int_\Sigma \left(4\,\frac{n-2}{n-3}\,\nabla\psi\cdot\nabla\psi_- + S_\Sigma\,\psi\psi_- \right) dv^{n-1} \\ &= \int_\Sigma \left(4\,\frac{n-2}{n-3}\,\|\nabla\psi_-\|^2 + S_\Sigma\,\psi_-^2 \right) dv^{n-1} \\ &\geq 2\,\frac{n-1}{n-3}\int_\Sigma \|\nabla\psi_-\|^2\, dv^{n-1} \qquad \text{(wegen (i))} \\ &= 2\,\frac{n-1}{n-3}\int_{\{x\in\Sigma\,|\,\psi(x)<0\}} \|\nabla\psi\|^2\, dv^{n-1} \quad . \end{aligned}$$

Also ist ψ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\{\psi < 0\}$ konstant, und somit ist ψ nichtnegativ. Andererseits ist ψ *Lösung* einer gleichmäßig elliptischen Gleichung in Divergenzgestalt, und die Harnacksche Ungleichung impliziert [GT; 8.21]:

$$\sup_{D_\sigma}\psi \;\leq\; c(\sigma)\inf_{D_\sigma} \qquad \text{für alle} \quad \sigma >> 1 \quad .$$

Da $\psi(\infty) = 1$, kann ψ den Wert Null nicht annehmen. ∎

(4.5.5) *Beweis des Positive Energy Theorem* (3.6.1) *für* $4 \leq n \leq 7$.

Wir betrachten auf Σ die Metrik $h = \psi^{\frac{4}{n-3}} g|_\Sigma$ mit der Funktion ψ aus (4.5.4). Es gilt:

$$\psi^{\frac{4}{n-3}}(\xi) = 1 + \frac{4\overline{A}}{n-3} |\xi|^{3-n} + C^2_{3-n-\varepsilon} \quad .$$

Hieraus folgt wegen (4.5.3)

$$h_{ij}(\xi) = \left(1 + \frac{4\overline{A}}{n-3} |\xi|^{3-n}\right) \delta_{ij} + C^2_{3-n-\varepsilon} \quad .$$

Da die Skalarkrümmung von h verschwindet, genügt die Metrik h den Voraussetzungen von Satz (3.6) in der Dimension $n - 1$, und nach Lemma (3.8) gilt:

(i) $$E(h) = 4(n-2)\,\overline{A} \quad .$$

Nun ist ψ in der Stabilitätsungleichung zulässig und wir erhalten aus der Abschätzung (i) von (4.5.4)

(ii) $$\int_\Sigma \left(4\,\frac{n-2}{n-3}\,\|\nabla\psi\|^2 + S_\Sigma\,\psi^2\right) dv^{n-1} \geq 0 \quad .$$

Jetzt wählen wir ψ selbst als Testfunktion und erhalten für $\sigma >> 1$:

(iii) $$0 = \int_{D_\sigma} \left(4\,\frac{n-2}{n-3}\,\|\nabla\psi\|^2 + S_\Sigma\,\psi^2\right) dv - 4\,\frac{n-2}{n-3} \int_{\partial D_\sigma} \psi(\partial_\eta \psi)\, dv^{n-2} \quad .$$

Im Unterschied zu (4.5.4) verschwindet diesmal der Randterm nicht.
Sei $S_\sigma = \{\xi \in H \mid |\xi| = \sigma\}$. Bezeichne mit ∂^τ den Gradienten auf S_σ bzgl. der euklidischen Metrik auf S_σ. Setzen wir $e_r = \frac{\xi}{|\xi|}$, so gilt:

$$\partial^\tau u = \partial u - \langle \partial u, e_r \rangle\, e_r$$
$$|\partial^\tau u|^2 = |\partial u|^2 - \langle \partial u, e_r \rangle^2 \quad .$$

Seien χ^{n-2} bzw. v^{n-2} die Volumenmaße auf ∂D_σ. Dann gilt (1.1.3):

$$d\chi^{n-2}(\xi) = \sqrt{1+|\partial^T u|^2}\, d\xi^{n-2}$$

(iv) $$dv^{n-2}(\xi) = \varphi(\xi,u(\xi))^2 \sqrt{1+|\partial^T u(\xi)|^2}\, d\xi^{n-2} \quad .$$

Jetzt müssen wir noch die Normale an ∂D_σ ausrechnen. Seien dazu ν bzw. N die Riemannsche bzw. euklidische Normale auf Σ (nach oben zeigend gewählt). Wir berechnen mit (1.1.4) und $r(x) = |\xi|$:

$$(\nabla_M r)(x) = \varphi^{2-p}(x)\, e_r$$

$$(\nabla_\Sigma r)(x) = \varphi^{2-p}(x)\, (e_r - \langle e_r, N\rangle\, N)$$

$$\|\nabla_\Sigma r\| = \varphi^{1-\frac{p}{2}} \sqrt{1-\langle e_r, N\rangle^2}$$

$$\Rightarrow \quad (v) \quad \eta(x) = \varphi^{1-\frac{p}{2}}(x)\, \frac{e_r - \langle e_r, N\rangle\, N}{\sqrt{1-\langle e_r,\, N\rangle^2}} \quad .$$

Dabei ist

$$N(\xi,u(\xi)) = \frac{(-\partial u(\xi), 1)}{\sqrt{1+|\partial u(\xi)|^2}} \quad .$$

Aber wir haben:

$$\psi(x) = 1 + \frac{\overline{A}}{|\xi|^{n-3}} + C^2_{3-n-\epsilon}(H_0)$$

$$\partial\psi(x) = \frac{(3-n)\overline{A}}{|\xi|^{n-2}}\, e_r + C^1_{2-n-\epsilon}(H_0) \quad .$$

Setzen wir dies alles zusammen und verwenden in der gewohnten Weise die asymptotischen Eigenschaften von φ und u , so erhalten wir letztendlich

(vi) $$\psi(\partial_\eta \psi)\, dv^{n-2}(\xi) = \left\{ \frac{(3-n)\overline{A}}{|\xi|^{n-2}} + \mathcal{O}(|\xi|^{2-n-\epsilon}) \right\} d\xi^{n-2} \quad .$$

Führen wir daher in (iii) den Grenzübergang $\sigma \to \infty$ durch, so folgt aus (ii):

$$4(2-n)\, \omega_{n-1}\, \overline{A} = \int_\Sigma \left(4\, \frac{n-2}{n-3}\, \|\nabla\psi\|^2 + S_\Sigma\, \psi^2 \right) dv^{n-1} > 0 \quad .$$

Also ergibt sich

$$E(h) = 4(n-2)\,\overline{A} < 0 \quad .$$

Dies ist aber ein Widerspruch zum Positive Energy Theorem in der Hyperflächendimension $n - 1$. Die Minimalfläche Σ kann nicht existieren, und wir müssen die indirekte Annahme $A < 0$ aus (4.0.3.1) fallen lassen. ∎

4.6 Beweis der Eindeutigkeitsaussage (3.6.2)

Wir führen jetzt noch den Beweis von (3.6.2) vor. Da wir uns dabei im wesentlichen nach der Vorlage [LP] richten, begnügen wir uns mit einer ausführlichen Skizze.

(4.6.1) Lemma.

Unter den Voraussetzungen von (3.6.2) folgt: (M,g) ist Ricci-flach.

Beweis: Der Beweis [SY; § 3], [LP; 10.7] beruht auf der Interpretation der Energie aus Satz (3.5).

Sei h ein symmetrischer (0,2)-Tensor mit kompaktem Träger auf M. Betrachte die Metriken $g_t = g + th$ und die dazugehörigen konformen Laplaceoperatoren $L_t = a\Delta_t + S_t$. Mit *denselben* Methoden wie in Lemma (3.9) findet man Lösungen φ_t $(t \in (-\epsilon,\epsilon))$ der Differentialgleichungen

$$L_t\,\varphi_t = S_g\,\varphi_t \quad .$$

Die φ_t sind positiv, und es gilt für ein $\mu > \frac{n-2}{2}$

$$\|\varphi_t - 1\|_{2,q,-\mu} \longrightarrow 0 \quad \text{mit} \quad t \longrightarrow 0 \quad .$$

Also genügen die Metriken $\tilde{g}_t = \varphi_t^{p-2}\,g_t$ der Energiebedingung (3.1) und sie haben die nichtnegative Skalarkrümmung

$$\tilde{S}_t = \varphi_t^{2-p}\,S_g \geq 0 \quad .$$

Nun liefert aber *Teil 1 des Positive Energy Theorem* (3.6)

$$E(\tilde{g}_t) \geq 0 = E(g)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d}{dt} E(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = 0 \quad .$$

Dabei ist nachzuweisen, daß die Kurve $\tilde{g}_t$ bzgl. der Norm aus (3.4) differenzierbar ist. Ist dies bekannt, so folgt aus Satz (3.5):

$$0 = \frac{d}{dt} E(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\int_M \tilde{S}_t \, \widetilde{dv}_t \right)\Big|_{t=0} + \int_M \left\langle Ric_g - \tfrac{1}{2} S_g \, g \, , \frac{d}{dt} \tilde{g}_t\Big|_{t=0} \right\rangle dv_g \quad .$$

Setzt man $\frac{d}{dt} \varphi_t\Big|_{t=0} = \psi$, so berechnet man leicht:

$$\frac{d}{dt} \tilde{g}_t\Big|_{t=0} = h + (p-2)\, \psi \, g$$

$$\frac{d}{dt} \widetilde{dv}_t\Big|_{t=0} = \tfrac{1}{2} \langle h + (p-2)\, \psi \, g, g \rangle \, dv_g \quad .$$

Damit folgt nun:

$$\frac{d}{dt} (\tilde{S}_t \, \widetilde{dv}_t)\Big|_{t=0} = 2\psi \, S \, dv + \frac{S}{2} \langle g,h \rangle \, dv$$

$$\langle Ric - \tfrac{1}{2} S_g \, g \, , \frac{d}{dt} g\Big|_{t=0} \rangle = \langle Ric - \frac{S}{2} g \, , h \rangle - 2\psi \, S \quad .$$

Zusammenfassend ergibt sich also:

$$0 = \frac{d}{dt} E(\tilde{g}_t)\Big|_{t=0} = \int_M \langle Ric, h \rangle \, dv \quad .$$

Da h beliebig war, ist der Riccitensor von g identisch Null. ∎

Der Eindeutigkeitssatz (3.6.2) folgt aus obigem Lemma und folgender, schwächeren Version des Positive Energy Theorem:

(4.3.2) Satz *Positive Energy Theorem für Mannigfaltigkeiten positiver Riccikrümmung*

Sei M^n, $n \geq 3$, eine Mannigfaltigkeit mit einer Struktur bei ∞ (o.B.d.A. M orientierbar). Sei g eine glatte Metrik auf M, die der Energiebedingung genügt und nichtnegative Riccikrümmung hat. Dann gilt:

(1) $\quad E(g) \geq 0$

(2) $\quad E(g) = 0$

$\Rightarrow$ M ist isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$.

Beweis: nach [LP; 10.2]:

Eine Anwendung von Satz (2.9) zeigt, daß wir annehmen dürfen, daß die asymptotischen Koordinaten $\{x^i\}$ Einschränkungen global definierter, g-harmonischer Funktionen sind [BR; 3.1]. Also gilt mit $\omega^i = dx^i$:

$$d\omega^i = 0 \qquad D^*\omega^i = 0 \quad .$$

Dabei ist D^* der Divergenzoperator auf 1-Formen. Die Formel von Bochner--Lichnerowicz impliziert:

$$0 = \tfrac{1}{2}\Delta|\omega^i|^2 + |D\omega^i|^2 + \mathrm{Ric}(\omega^i,\omega^i) \quad .$$

Integration über $M_R = \{x \in M \mid |x| < R\}$ und Summation über i liefert nach partieller Integration:

$$\sum_i \int_{M_R} \left(|D\omega^i|^2 + \mathrm{Ric}(\omega^i,\omega^i) \right) dv^n = \sum_i \int_{\partial M_R} g(D_\nu \omega^i, \omega^i)\, dv^{n-1} \quad .$$

Dabei ist ν die äußere Normale an ∂M_R. Verwendung der asymptotischen Aussagen für g zeigt [LP; 10.2]:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial M_R} \left(\sum_i \langle D_\nu \omega^i, \omega^i \rangle \right) dv^{n-1} = \omega_n\, E(g)$$

$$\Rightarrow \qquad E(g) = \frac{1}{\omega_n} \int_M \sum_i \left(|D\omega^i|^2 + \mathrm{Ric}(\omega^i,\omega^i) \right) dv^n \geq 0 \quad .$$

Falls $E(g)$ verschwindet, so sind alle ω^i parallel und insbesondere gilt

$$\nabla\langle\omega^i,\omega^j\rangle = \langle D\omega^i,\omega^j\rangle + \langle\omega^i,D\omega^j\rangle \equiv 0 \quad .$$

Da $\langle\omega^i,\omega^j\rangle(\infty) = \delta_{ij}$, folgt $\langle\omega^i,\omega^j\rangle \equiv \delta_{ij}$, das heißt

$$x: (M,g) \longrightarrow \left(\mathbb{R}^n , \sum (dx^i)^2\right)$$

ist eine lokale Isometrie. Nun ist (M,g) vollständig, und somit ist x eine Überlagerungsabbildung des (einfach zusammenhängenden) $\mathbb{R}^n$. Damit ist x die gesuchte, globale Isometrie. ∎

Literaturverzeichnis

Die untenstehende Literatur stellt keine umfassende Bibliographie zum Positive Energy Theorem dar. Es sind nur diejenigen Arbeiten aufgeführt, die im Text zitiert wurden.

[ADM] R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner: Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. Phys. Rev. 122 (1961), S. 997-1006

[AHW] H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Springer-Verlag 1985 (Hochschultext)

[AS] L. Ahlfors, L. Sario: Riemann surfaces. Princeton University Press 1960

[AT] T. Aubin: Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. Journale Math. Pure Appl. 55 (1976), S. 269-296

[BA] A. Besse: Einstein Manifolds. Springer-Verlag 1987 (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3. Folge, Band 10)

[BJ] D.R. Brill, P.S: Jang: The Positive Mass Conjecture. In: General Relativity and Gravitation (Band 1). Hrsgb: A. Held, Plenum Press (N.Y.) 1980, S. 173-193

[BR] R. Bartnik: The Mass of an Asymptotically Flat Manifold. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1986), S. 661-693

[CM] M. Cantor: Elliptic Operators and the Decomposition of Tensor Fields. Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 5 (1981), S. 235-262

[CSCB] A. Chaljub-Simon, Y. Choquet-Bruhat: Problèmes elliptiques du seconde ordre sur une varieté euclidienne à l'infini. Annales Fac. Sc. Toulouse 1 (1978), S. 9-25

[dCM] M.P. do Carmo: Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1976

[FH] H. Federer: Geometric Measure Theory. Springer-Verlag 1969 (Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 153)

[GE] E. Giusti: Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variations. Birkhäuser--Verlag 1984 (Monographs in Math., Band 80)

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: Riemannian Geometry. Springer-Verlag 1987 (Hochschultext)

[GHP] G.W. Gibbons, S.W. Hawking, M.J. Perry: Path Integrals and the Indefiniteness of the Gravitational Action. Nuclear Physics B 138 (1978), S. 141-150

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer: Riemannsche Geometrie im Großen. Springer-Verlag 1975 (2. Auflage) (Lecture Notes Band 55)

[GR] R. Geroch: General Relativity. In: S.S. Chern, R. Osserman (Hrsgb.): Differential Geometry. Proc. Sym. Pure Math. 27 (1975), S. 401-414

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer-Verlag 1983 (2. Auflage) (Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 224)

[HE] S.W. Hawking, S. Ellis: The Large Scale Structure of Spacetime. Cambridge Univ. Press 1973

[HS] R. Hardt, L. Simon: Boundary Regularity and Embedded Solutions for the Oriented Plateau Problem. Ann. of Math. 110 (1979), S. 439-486

[KH] H. Karcher: Riemannian Comparison Constructions. In: Second Edition of S.S. Chern (Hrsgb.): Studies in Global Geometry and Analysis, MAA Studies in Math., Band 4, Prentice-Hall 1967

[KJ] J.L. Kazdan: Positive Energy in General Relativity. In: Sém. Bourbaki, exp. 593, Astérisque, Math. Soc. France 1982, S. 315-330

[LP] J.M. Lee, T.M. Parker: The Yamabe Problem. Bull. Amer. Math. Soc. (New Series) 17 (1987), S. 37-91

[LR] R.B. Lockhart: Fredholm Properties of a Class of Elliptic Operators on Noncompact Manifolds. Duke Math. Journal 48 (1981), S. 289-312

[MN] N. Meyers: An Expansion about Infinity for Solutions of Linear Elliptic Equations. Journal Math. and Mech. 12 (Nr. 2) (1963), S. 247-264

[NJ] J. Nash: The Embedding Problem for Riemannian Manifolds. Ann. of Math. 63 (Nr. 2) (1956), S. 20-63

[SL] L. Simon: Lectures on Geometric Measure Theory. Proc. of the Centre for Math. Analysis, Australian Nat. University, Band 3, 1983

[SR1] R. Schoen: Conformal Deformation of a Riemannian Metric to Constant Scalar Curvature. Journal of Differential Geometry 20 (1984), S. 479-495

[SR2] R. Schoen: Variational Theory for the Total Scalar Curvature Functional for Riemannian Metrics and Related Topics. In: M. Giaquinta (Hrsg.): Topics in Calculus of Variations (Montecatini Terme 1987), Springer-Verlag 1989 (Lecture Notes Band 1365)

[SS] R. Schoen, L. Simon: A New Proof of the Regularity Theorem for Rectifiable Currents which Minimize Parametric Elliptic Functionals. Indiana Univ. Math. Journal 31 (Nr. 3), (1982), S. 415-434

[SY1] R. Schoen, S.T. Yau: On the Proof of the Positive Mass Conjecture in General Relativity. Comm. Math. Phys. 65 (1979), S. 45-76

[SY2] R. Schoen, S.T. Yau: The Energy and Linear Momentum of Spacetimes in General Relativity. Comm. Math. Phys. 79 (1981), S. 47-51

[SY3] R. Schoen, S.T. Yau: Proof of the Positive Mass Theorem II. Comm. Math. Phys. 79 (1981), S. 231-260

[SY4] R. Schoen, S.T. Yau: Proof of the Positive Action Conjecture in Quantum Relativity. Phys. Rev. Letters 42 (Nr. 9), (1979), S. 547-548

[SY5] R. Schoen, S.T. Yau: Conformally Flat Manifolds, Kleinian Groups and Scalar Curvature. Inventiones Mathematicae 92 (1988), S. 47-71

[TN] N.S. Trudinger: Remarks Concerning the Conformal Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22 (1968), S. 265-274

[WE] E. Witten: A New Proof of the Positive Energy Theorem. Comm. Math. Phys. 80 (1981), S. 381-402

[YH] H. Yamabe: On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds. Osaka Math. Journal 12 (1960), S. 21-37