Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Blatt 1
Abgabe: 07.05.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).
Gib (ohne Wahrheitstafeln zu benutzen) aussagenlogische Formeln sowohl in KNF als auch in DNF an, welche logisch äquivalent zu den folgenden aussagenlogischen Formeln sind.

(a) $\Big((P \longrightarrow \neg(Q \longrightarrow R)) \longrightarrow (Q \longrightarrow \neg R)\Big)$.

(b) $\Big((\neg P \vee Q) \longrightarrow \big(P \longrightarrow \neg(Q \vee R)\big)\Big)$.

Aufgabe 2 (5 Punkte).
Entscheide mit Hilfe der Tableau Methode, ob folgende Aussagen Tautologien sind.

(a) $\Big((\neg\neg A_1 \longrightarrow A_2) \longrightarrow (\neg A_2 \longrightarrow \neg A_1)\Big)$.

(b) $((P \to Q) \wedge (\neg P \vee Q))$.

(c) $\big((P \wedge Q) \longrightarrow P\big)$.

(d) $\left(\Big(\big(P \wedge Q\big) \longrightarrow R\Big) \longrightarrow \Big(P \longrightarrow (Q \longrightarrow R)\Big)\right)$.

(e) $\Big(\big((\bigwedge_{i=1}^{k} A_i) \longrightarrow P\big) \longrightarrow \big(A_1 \longrightarrow (A_2 \longrightarrow \ldots (A_k \longrightarrow P)\ldots)\big)\Big)$.

Aufgabe 3 (3 Punkte).
Sind $\Big((P \wedge Q) \to R\Big)$ und $\Big(P \to (Q \to R)\Big)$ logisch äquivalent?

Aufgabe 4 (6 Punkte).
In der Sprache $\mathcal{L} = \{c, <\}$ seien c ein Konstantenzeichen und $<$ ein zweistelliges Relationszeichen.

(a) Betrachte die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{Z}_1$ und die $\mathcal{Z}_1$, welche beide Universum $\mathbb{Z}$ besitzen, mit den Interpretationen $c^{\mathcal{Z}_1} = 5$ und $c^{\mathcal{Z}_2} = -9$, sowie $<^{\mathcal{Z}_1}$ und $<^{\mathcal{Z}_2}$ als die übliche lineare Ordnung. Zeige, dass $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(b) Ferner sei $\mathcal{Z}_3$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$ und $c^{\mathcal{Z}_3} = -3$ sowie $n <^{\mathcal{Z}_3} m$, falls $m < n$. Zeige, dass auch $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$ isomorphe $\mathcal{L}$-Strukturen sind.

(c) Wir betrachten nun die Sprache $\mathcal{L}' = L \cup \{d\}$, wobei d ein weiteres Konstantenzeichen ist. Erweitere die beiden Strukturen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_3$ zu $\mathcal{L}'$-Strukturen $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_3'$, indem wir d durch
$$d^{\mathcal{Z}_1'} = 0 = d^{\mathcal{Z}_3'}$$
interpretieren. Sind $\mathcal{Z}_1'$ und $\mathcal{Z}_3'$ immer noch isomorphe $\mathcal{L}'$-Strukturen?

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.