

**Mathematische Logik**  
Blatt 3  
Abgabe: 21.05.2019 10 Uhr  
**Gruppennummer angeben!**

**Aufgabe 1** (6 Punkte).

- (a) Zeige, dass die Teilmengen  $R_{<} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\}$  und  $P_d = \{n \in \mathbb{N} \mid d \text{ teilt } n\}$  für jedes  $d \geq 2$  aus  $\mathbb{N}$  in der Struktur  $\mathcal{N}_1 = (\mathbb{N}, +)$  definierbar sind. Werden Parameter gebraucht?
- (b) Zeige, dass die Einermenge  $\{n\}$  in  $\mathcal{N}_1 = (\mathbb{N}, +)$  ohne Parameter definierbar ist.
- (c) Betrachte nun die Struktur  $\mathcal{N}_2 = (\mathbb{N}, f_d, +)$ , wobei  $f_d$  die folgende einstellige Funktion ist:

$$f_d(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0; \\ \text{die größte natürliche Potenz } d^k \text{ von } d \text{ mit } d^k \leq n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass die Teilmenge  $\text{Pot}_d = \{d^k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{N}_2$  definierbar ist. Zeige weiter, dass die Funktion  $f_d$  in der Struktur  $\mathcal{N}_3 = (\mathbb{N}, +, \text{Pot}_d)$  wiederum definierbar ist.

**Aufgabe 2** (8 Punkte).

Sei  $\mathcal{L}$  die Sprache, welche aus drei einstelligen Relationszeichen  $P_1, P_2$  und  $P_3$  besteht.

- (a) Schreibe eine Theorie  $T$ , deren Modelle genau die  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathcal{A}$  sind, so dass die drei Mengen  $P_i^{\mathcal{A}}, 1 \leq i \leq 3$  paarweise disjunkt und unendlich sind und das Universum  $A$  überdecken.
- (b) Ist die Theorie konsistent?
- (c) Sind je zwei Modelle der Theorie mit Kardinalität Kontinuum isomorph?
- (d) Sind je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent?

**Aufgabe 3** (6 Punkte).

Sei  $\mathcal{L}$  die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen  $f$ , sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen  $P$  und  $Q$  besteht.

- (a) Schreibe eine Theorie  $T$ , deren Modelle genau die  $\mathcal{L}$ -Strukturen  $\mathcal{A}$  mit den folgenden Eigenschaften sind:
- $A$  ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen  $P^{\mathcal{A}}$  und  $Q^{\mathcal{A}}$
  - eingeschränkt auf  $P^{\mathcal{A}}$  ist  $f^{\mathcal{A}}$  eine Surjektion  $P^{\mathcal{A}} \rightarrow Q^{\mathcal{A}}$  und eingeschränkt auf  $Q^{\mathcal{A}}$  die Identität
  - jede Faser  $f^{-1}(y)$ , mit  $y$  aus  $Q^{\mathcal{A}}$ , ist unendlich.
- (b) Ist die Theorie konsistent? Besitzt  $T$  abzählbare Modelle?
- (c) Sind je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent?