

Mathematische Logik
Blatt 3
Abgabe: 21.05.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

- (a) Zeige, dass die Teilmengen $R_{<} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\}$ und $P_d = \{n \in \mathbb{N} \mid d \text{ teilt } n\}$ für jedes $d \geq 2$ aus \mathbb{N} in der Struktur $\mathcal{N}_1 = (\mathbb{N}, +)$ definierbar sind. Werden Parameter gebraucht?
- (b) Zeige, dass die Einermenge $\{n\}$ in $\mathcal{N}_1 = (\mathbb{N}, +)$ ohne Parameter definierbar ist.
- (c) Betrachte nun die Struktur $\mathcal{N}_2 = (\mathbb{N}, f_d, +)$, wobei f_d die folgende einstellige Funktion ist:

$$f_d(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0; \\ \text{die größte natürliche Potenz } d^k \text{ von } d \text{ mit } d^k \leq n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass die Teilmenge $\text{Pot}_d = \{d^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{N}_2 definierbar ist. Zeige weiter, dass die Funktion f_d in der Struktur $\mathcal{N}_3 = (\mathbb{N}, +, \text{Pot}_d)$ wiederum definierbar ist.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei \mathcal{L} die Sprache, welche aus drei einstelligen Relationszeichen P_1, P_2 und P_3 besteht.

- (a) Schreibe eine Theorie T , deren Modelle genau die \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} sind, so dass die drei Mengen $P_i^{\mathcal{A}}, 1 \leq i \leq 3$ paarweise disjunkt und unendlich sind und das Universum A überdecken.
- (b) Ist die Theorie konsistent?
- (c) Sind je zwei Modelle der Theorie mit Kardinalität Kontinuum isomorph?
- (d) Sind je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent?

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei \mathcal{L} die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f , sowie aus zwei einstelligen Relationszeichen P und Q besteht.

- (a) Schreibe eine Theorie T , deren Modelle genau die \mathcal{L} -Strukturen \mathcal{A} mit den folgenden Eigenschaften sind:
- A ist die disjunkte Vereinigung der beiden unendlichen Mengen $P^{\mathcal{A}}$ und $Q^{\mathcal{A}}$
 - eingeschränkt auf $P^{\mathcal{A}}$ ist $f^{\mathcal{A}}$ eine Surjektion $P^{\mathcal{A}} \rightarrow Q^{\mathcal{A}}$ und eingeschränkt auf $Q^{\mathcal{A}}$ die Identität
 - jede Faser $f^{-1}(y)$, mit y aus $Q^{\mathcal{A}}$, ist unendlich.
- (b) Ist die Theorie konsistent? Besitzt T abzählbare Modelle?
- (c) Sind je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent?