Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Blatt 5
Abgabe: 04.06.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}_0$ eine Teilmenge der Sprache $\mathcal{L}$. Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ kann in kanonischer Weise als $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0$ betrachtet werden. Zeige induktiv über den Aufbau der $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $a_1, \dots, a_n$ aus A

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{L}_0 \models \varphi[a_1, \dots a_n].$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Funktionszeichen f und einem Konstantenzeichen 0 besteht. Betrachte die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$ mit folgenden Interpretationen:

$$0^{\mathcal{N}} = 0 \text{ und } f^{\mathcal{N}}(x) := x + 1.$$

(a) Zeige, dass es für jedes $n \neq 0$ in $\mathbb{N}$ ein k gibt, so dass $n = f^k(0) := \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{k}(0)$.

(b) Schreibe eine $\mathcal{L}$-Aussage, welche in $\mathcal{N}$ gilt und besagt, dass jedes $0 \neq n \in \mathbb{N}$ im Bild von $f^{\mathcal{N}}$ liegt.

(c) Zeige, dass es eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}$ von $\mathcal{N}$ und ein Element m in M derart gibt, dass $m \neq f^k(0)$ für alle k in $\mathbb{N}$.

Hinweis: Das vollständige Diagramm.

(d) Beschreibe drei paarweise nicht isomorphe abzählbare Strukturen, welche zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalent sind.

(e) Wie sehen abzählbare Modelle des vollständigen Diagramms $\text{Diag}(\mathcal{N})$ im Allgemeinen aus (eine informelle Beschreibung genügt)? Wie viele gibt es, bis auf Isomorphie?

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Leite die folgenden Formeln aus dem Hilbertkalkül für die Sprache $\mathcal{L}$, welche aus dem einstelligen Funktionszeichen f besteht, ab.

(a) $\Big(\big(\forall x \varphi \land \psi\big) \to \forall x \big(\varphi \land \psi\big)\Big)$, falls x nicht frei in ψ vorkommt.

(b) $\Big(\forall x \forall y \big(f(x) \doteq f(y)\big) \to \exists z \forall u \big(z \doteq f(u)\big)\Big)$.

(c) $\Big(\exists x \forall y \big(x \doteq f(y)\big) \to \forall z \forall u \big(f(z) \doteq f(u)\big)\Big)$.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.