Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Blatt 6
Abgabe: 25.06.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei x eine Menge, welche aus transitiven Mengen besteht.

(a) Zeige, dass $\bigcup x$ transitiv ist.

(b) Zeige, dass $\bigcap x$ transitiv ist, falls $x \neq \emptyset$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Eine Teilmenge S der linear geordneten Menge $(X, <)$ ist ein *Anfangssegment*, falls für jedes x aus X und y aus S mit $x < y$ das Element x in S liegt. Das Anfangssegment S ist *echt*, falls $S \neq X$.

Sei $(\mathcal{S}_X, \subset)$ die partiell geordnete Menge aller echten Anfangssegmente von X und

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & \mathcal{S}_X \\ & x & \mapsto & S_x = \{y \in X \mid y < x\}. \end{array}$$

(a) Zeige, dass f streng monoton wachsend ist. Schließe daraus, dass f injektiv ist.

(b) Zeige, dass jeder (nicht-leere) Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{S}_X$ wieder ein Element aus $\mathcal{S}_X$ ist.

(c) Zeige, dass f surjektiv ist, wenn $(X, <)$ *wohlgeordnet* ist, das heißt, falls jede nicht-leere Teilmenge $Y \subset X$ ein kleinstes Element besitzt.

(d) Zeige, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $(X, <)$ wohlgeordnet ist.
HINWEIS: Betrachte $\tilde{Y} = \{z \in X \mid \exists y \in Y \text{ mit } y \leq z\}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte).

Die *angeordnete Summe* $X_1 \overleftarrow{+} X_2$ zweier linear geordneter Mengen $(X_1, <_1)$ und $(X_2, <_2)$ ist die Menge

$$X_1 \sqcup X_2 = (X_1 \times \{1\}) \cup (X_2 \times \{2\})$$

mit der linearen Ordnung

$$(z, i) <_{X_1 \overleftarrow{+} X_2} (u, j) \Longleftrightarrow \begin{cases} i < j \text{ oder} \\ i = j \text{ und } z <_i u \end{cases}$$

Das *angeordnete Produkt* $X \overleftarrow{\times} Y$ der linear geordneten Mengen $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ ist die Menge $X \times Y$ mit der linearen Ordnung

$$(z_1, u_1) <_{X \overleftarrow{\times} Y} (z_2, u_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 <_Y u_2 \text{ oder} \\ u_1 = u_2 \text{ und } z_1 <_X z_2 \end{cases}$$

Bitte wenden!!

(a) Zeige, dass $X \overleftarrow{+} Y$ und $X \overleftarrow{\times} Y$ linear geordnet sind, wenn $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ linear geordnet sind.

(b) Zeige, dass $X \overleftarrow{+} Y$ und $X \overleftarrow{\times} Y$ wohlgeordnet sind, wenn die linearen Ordnungen $(X, <_X)$ und $(Y, <_Y)$ wohlgeordnet sind.

(c) Zeige, dass $(X \overleftarrow{+} Y) \overleftarrow{+} Z \simeq X \overleftarrow{+} (Y \overleftarrow{+} Z)$, als geordnete Mengen.

(d) Zeige, dass $X \overleftarrow{\times} (Y \overleftarrow{+} Z) \simeq (X \overleftarrow{\times} Y) \overleftarrow{+} (X \overleftarrow{\times} Z)$, als geordnete Mengen.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.