

Mathematische Logik
 Blatt 8
 Abgabe: 16.07.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

(a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $|\cdot| : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.
 $(x, y) \mapsto |x - y|$

(b) Zeige, dass die Funktion $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitiv rekursiv ist.
 $(n, m) \mapsto \underbrace{n^n}_{m \text{ Mal}}$

Hinweis: Betrachte die Funktion $(x, y) \mapsto x^y$.

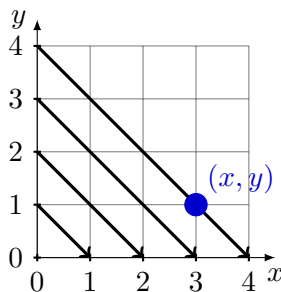
Aufgabe 2 (4 Punkte).

(a) Zeige, dass jede endliche Teilmenge von \mathbb{N}^n primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Betrachte eine Einermenge.

(b) Zeige, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y\}$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte).



Die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto \binom{x+y+1}{2} + x$$

bestimmt eine Aufzählung von \mathbb{N}^2 , wie im obigen Diagramm: das Element $(0, 0)$, mit Wert $0 = \alpha(0, 0)$, ist das kleinste Element. Sein Nachfolger ist $(0, 1)$ mit Wert $1 = \alpha(0, 1)$. Auf jeder Diagonale ist der Nachfolger von $(x, y+1)$ der Punkt $(x+1, y)$. Der Nachfolger von $(x, 0)$ ist der Punkt $(0, x+1)$.

(Bitte wenden!)

- (a) SchlieÙe aus der Identität

$$1 + 2 + \dots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x, y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x, y) . Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden? Was ist der Zusammenhang mit $\alpha(x, y)$?

- (b) Zeige mit Induktion, dass jedes n aus \mathbb{N} im Bildbereich von α liegt. SchlieÙe daraus, dass α eine Bijektion ist.
- (c) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.
- (d) Zeige, dass die Funktionen β_1 und β_2 mit $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ primitiv rekursiv sind.

HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

- (e) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2 , dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist. Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IN DEN (MIT DEN NUMMERN DER ÜBUNGSGRUPPEN GEKENNZEICHNETEN) FÄCHERN IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.