Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Blatt 9
Abgabe: 23.07.2019 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive streng monoton steigende Funktion. Zeige, dass die Teilmenge $f(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ rekursiv ist.

(b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive streng monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

(c) Schließe daraus, dass jede rekursiv aufzählbare unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive unendliche Teilmenge $B \subset A$ besitzt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche nur aus dem zweistelligen Relationszeichen $<$ besteht.

(a) Gib eine $\mathcal{L}$-Theorie T an, deren Modelle genau alle dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar?

(b) Zeige mit Hilfe eines Back-and-Forth Systems, dass T vollständig ist.

(c) Schließe daraus, dass T entscheidbar ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Betrachte in der Sprache $\mathcal{L} = \{0, 1, +, P\}$, wobei P ein einstelliges Relationszeichen ist, die Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, P^{\mathcal{N}})$ mit $P^{\mathcal{N}} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n = m^2 \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$.

1. Zeige, dass sowohl die Ordnung $<$ als auch der Graph der Nachfolgerfunktion durch $\mathcal{L}$-Formeln in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar sind.

2. Welche Teilmenge aus $\mathbb{N}^2$ wird durch die Formel
$$\Big(P(y) \land P(y + x + x + 1) \land \neg\exists z\Big(P(z) \land (y < z < y + x + x + 1)\Big)\Big)$$
in $\mathcal{N}$ definiert? Schließe daraus, dass die Abbildung $x \mapsto x^2$ in $\mathcal{N}$ definierbar ist.

3. Zeige, dass die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, z = x \cdot y\}$ in der Struktur $\mathcal{N}$ definierbar ist.

4. Ist die Theorie $Th(\mathcal{N})$ entscheidbar? (Eine informelle Begründung genügt).

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im Keller des mathematischen Instituts.