Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2019

Mathematische Logik
Heimklausur I
Abgabe: 17.06.2019, am Anfang der Vorlesung
Die Heimklausur kann zu zweit eingereicht werden.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass eine widerspruchsfreie Theorie genau dann vollständig ist, wenn sie eine eindeutige Vervollständigung besitzt.

(b) Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Zeige, dass das vollständige Diagramm $\mathrm{Diag}(\mathcal{A})$ eine Henkintheorie ist. Ist es eine vollständige Theorie?

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus abzählbar vielen Konstantenzeichen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sowie einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Wir betrachten die Klasse $\mathcal{K}$ der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$, auf welchen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation definiert und die Äquivalenzklasse des Elementes $c_n^{\mathcal{A}}$ die einzige Äquivalenzklasse mit n Elementen ist.

(a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse $\mathcal{K}$ an. Ist T widerspruchsfrei?

(b) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass jedes Modell $\mathcal{M}$ von T eine elementare Erweiterung $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ mit einer neuen unendlichen Äquivalenzklasse besitzt. Das heißt, dass es in N eine unendliche Äquivalenzklasse gibt, welche keinen Repräsentanten aus M besitzt.

(c) Zeige mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems, dass je zwei Modelle von T mit unendlich vielen unendlichen Äquivalenzklassen elementar äquivalent sind.

(d) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

(e) Beschreibe (informell und bis auf Isomorphie) alle abzählbaren Modelle von T.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

Sei n eine natürliche Zahl. Ein Element g einer abelschen Gruppe $(G, \cdot)$ ist ein n-*Torsionselement*, falls $g^n = 1_G$. Die Torsion von G ist die Menge aller Gruppenelemente, welche für ein n in $\mathbb{N}$ ein n-Torsionselement sind. Die Gruppe G hat beschränkten Exponenten, falls es eine natürliche Zahl N gibt, so dass jedes Element aus G ein N-Torsionselement ist.

(a) Sei G eine abelsche Gruppe. Zeige, dass die Torsion sowie für jedes n aus $\mathbb{N}$ die Menge der n-Torsionselemente Unterguppen sind.

(b) Schreibe in der Gruppensprache $\mathcal{L}_{Gp}$ eine Theorie T_0, so dass jedes Modell von T_0 eine abelsche Gruppe ist. Zeige für festes n aus $\mathbb{N}$, dass die Kollektion aller n-Torsionselemente eines Modells von T_0 eine definierbare Teilmenge ist.

Bitte wenden!!

(c) Sei nun $T \supset T_0$ eine widerspruchsfreie $\mathcal{L}_{Gp}$-Theorie derart, dass jedes Modell $\mathcal{G}$ von T nur aus Torsion besteht. Zeige, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass jedes Modell $\mathcal{G}$ von T Exponent höchstens N hat.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Ein *Kantenpfad* in einem Graphen (V, E) ist eine Folge von Punkten $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ aus V mit $\{x_i, x_{i+1}\}$ in E für $0 \leq i \leq n-1$. Der Kantenpfad ist *abgeschlossen*, falls $x_0 = x_n$ und *echt*, falls $n > 0$ und jede Kante höchstens einmal vorkommt. Ein Graph ist *zusammenhängend*, falls je zwei verschiedene Punkte mit einem Kantenpfad verbunden sind und *zykelfrei*, falls es keinen echten abgeschlossenen Kantenpfad gibt.

Sei nun $\mathcal{V}$ ein zusammenhängender zykelfreier Graph mit beliebig langen Pfaden. Betrachte $\mathcal{V}$ als $\{R\}$-Struktur (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) und zeige, dass es eine elementare Erweiterung gibt, welche nicht mehr zusammenhängend ist.

Ist die Eigenschaft *zusammenhängend sein* axiomatisierbar?