Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

Lineare Algebra II

Blatt 2

Abgabe: 10.05.2021, 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei A eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix über $\mathbb{C}$. Zeige, dass A sich schreiben lässt als $A = B^2$ für eine $n \times n$-Matrix B über $\mathbb{C}$.

Ist die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Quadrat in $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Gegeben einen Endomorphismus $F : V \to V$ des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V sowie ein Polynom $P(T) = \sum_{j=0}^{D} a_j T^j$ aus $\mathbb{K}[T]$, setze

$$\begin{aligned} P(F): \quad V &\to V \\ v &\mapsto \sum_{j=0}^{D} a_j F^j(v) \end{aligned}$$

(a) Zeige, dass $P(F) \circ F^k = F^k \circ P(F)$ für jede Potenz F^k von F.

(b) Ist $P(F) \circ F^k = P(F^k)$?

(c) Zeige, dass $Q(F) \circ P(F) = (Q \cdot P)(F)$ (als Abbildungen) für jedes Polynom Q mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$.

Hinweis: Induktion über den Grad von P (aber es geht auch ohne!).

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Wir betrachten die folgende $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik verschieden von n.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Dimension des Kernes von A.

(b) Zeige, dass $1_{\mathbb{K}}$ ein Eigenwert der Matrix ist.

(c) Ist A diagonalisierbar? Bestimme das charakteristische Polynom von A.

(d) Berechne das Minimalpolynom von A.

Hinweis: Wodurch wird das Minimalpolynom eindeutig bestimmt?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Gegeben einen Endomorphismus $F : V \to V$ des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V sowie ein Polynom $P(T)$ aus $\mathbb{K}[T]$, zeige

$$P(F)(v) = P(\lambda)v$$

für alle Skalare λ aus $\mathbb{K}$ und Vektoren v aus dem Eigenraum V_λ.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.