Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 10

Abgabe: 15.01.2019 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

(a) Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$g(x_1, \ldots, x_k, y) = \sum_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$$

auch (primitiv) rekursiv ist, wobei die leere Summe Wert 0 hat.

(b) Zeige, dass die Teilmenge von $\mathbb{N}$, welche aus den Potenzen von 2 besteht, primitiv rekursiv ist.

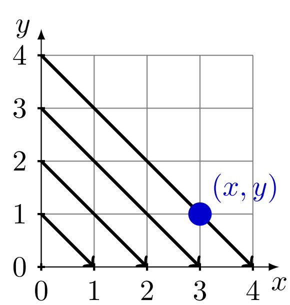
(c) Schließe daraus, dass die Funktion $x \mapsto$ Anzahl von Potenzen von 2, welche echt kleiner als x sind, eine primitiv rekursive Funktion ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

(a) Zeige, dass die leere Menge primitiv rekursiv ist. Schließe daraus, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Diagonale $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,|\, x = y\}$ eine primitiv rekursive Teilmenge von $\mathbb{N}^2$ ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte).



Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x, y) & \mapsto & \binom{x+y+1}{2} + x \end{array}$$

bestimmt eine Aufzählung von $\mathbb{N}^2$, wie im obigen Diagramm: das Element $(0, 0)$, mit Wert $0 = \alpha(0, 0)$, ist das kleinste Element. Sein Nachfolger ist $(0, 1)$ mit Wert $1 = \alpha(0, 1)$. Auf jeder Diagonale ist der Nachfolger von $(x, y+1)$ der Punkt $(x+1, y)$. Der Nachfolger von $(x, 0)$ ist der Punkt $(0, x+1)$.

(Bitte wenden!)

(a) Schließe aus der Identität

$$1 + 2 + \ldots + n = \binom{n+1}{2},$$

dass die Funktion α injektiv ist.

HINWEIS: Auf der Gerade im Diagramm, welche den Punkt (x, y) enthält, gibt es genau x viele Vorgänger von (x, y). Wie viele Punkte gibt es auf den vorigen Geraden? Was ist der Zusammenhang mit $\alpha(x, y)$?

(b) Zeige mit Induktion, dass jedes n aus $\mathbb{N}$ im Bildbereich von α liegt. Schließe daraus, dass α eine Bijektion ist.

(c) Zeige, dass α primitiv rekursiv ist.

(d) Zeige, dass die Funktionen β_1 und β_2 mit $\alpha^{-1} = (\beta_1, \beta_2)$ primitiv rekursiv sind.

HINWEIS: $\alpha(x, y) \geq \max\{x, y\}$.

Sei nun die Fibonacci Folge:

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ und } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ für } n \geq 2.$$

(e) Zeige mit Hilfe der Funktionen β_1 und β_2, dass die Funktion $h(n) = \alpha(a_n, a_{n+1})$ primitiv rekursiv ist. Insbesondere ist die Funktion $n \mapsto a_n = \beta_1(h(n))$ auch primitiv rekursiv.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.