Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2018/2019

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 11
Abgabe: 22.01.2019 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (primitiv) rekursive Funktion. Zeige, dass folgende Funktionen auch (primitiv) rekursiv sind.

(a) $g(x_1, \ldots, x_k, y) = \prod_{z<y} f(x_1, \ldots, x_k, z)$, wobei das leere Produkt den Wert 1 hat.

(b) $g(x_1, \ldots, x_k, y) = \begin{cases} \min\{z \leq y \mid f(x_1, \ldots, x_k, z) = 0\}, & \text{falls das Minimum existiert} \\ y+1, & \text{sonst} \end{cases}$

HINWEIS: Beweis von Lemma 3.10. im Skript.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive monoton steigende Funktion. Zeige, dass $f(\mathbb{N})$ rekursiv ist.

(b) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine rekursive Funktion mit unendlichem Bildbereich. Zeige, dass es eine rekursive monoton steigende Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart gibt, dass $h(\mathbb{N}) \subset g(\mathbb{N})$.

(c) Schließe daraus, dass jede rekursiv aufzählbare unendliche Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine rekursive unendliche Teilmenge $B \subset A$ besitzt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{<\}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen besteht.

(a) Gib eine $\mathcal{L}$-Theorie T an, deren Modelle genau alle dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar?

(b) Zeige mit Hilfe eines Back-and-Forth Systems, dass T vollständig ist.

(c) Schließe daraus, dass T entscheidbar ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**
Eine Teilmenge A von $\mathbb{N}$ ist *einfach*, falls A rekursiv aufzählbar ist, unendliches Komplement besitzt aber keine unendliche Teilmenge des Komplements von A rekursiv aufzählbar ist.
Sei A eine einfache Menge und setze

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n+1 \in A\}.$$

Zeige, dass B nicht rekursiv ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.