Prof. Amador Martin-Pizarro | Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch | Wintersemester 2018/2019

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 3

Abgabe: 13.11.2018 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E. Wir betrachten zwei $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ derart, dass $E^{\mathcal{A}}$ und $E^{\mathcal{B}}$ Äquivalenzrelationen sind. Ferner ist jede Äquivalenzklasse unendlich und es gibt unendlich viele Äquivalenzklassen (in beiden Strukturen). Zeige, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ein nichtleeres Back-&-Forth System haben.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathcal{L} = \{P\}$ die Sprache, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, so dass $P^{\mathcal{A}}$ als auch $A \setminus P^{\mathcal{A}}$ unendlich sind.

(b) Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht. Schreibe eine Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in denen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist.

(c) Für zwei $\mathcal{L}$-Strukturen wie in (b), ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein nichtleeres Back-&-Forth System?

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**

Sei R ein zweistelliges Relationszeichen. Ein *Zufallsgraph* ist ein Graph $\mathcal{G}$, der gesehen als $\{R\}$-Struktur (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) die folgende Eigenschaft hat: Für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B der Grundmenge gibt es einen Punkt c, so dass

$$(a, c) \in R^{\mathcal{G}}, \text{ aber } (b, c) \notin R^{\mathcal{G}}$$

für alle a aus A und b aus B.

(a) Gibt es endliche Zufallsgraphen? Wenn ja, beschreibe diese vollständig.

(b) Sei

$$n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i,$$

die binäre Darstellung von der natürlichen Zahl n, wobei $[n]_i = 0, 1$ für $0 \leq i \leq k$. Sei $\mathcal{A}$ die $\{R\}$-Struktur mit Universum $\mathbb{N}$ und der Interpretation:

$$R^{\mathcal{A}}(n, m) \;\Leftrightarrow\; [m]_n = 1 \text{ oder } [n]_m = 1$$

Zeige, dass $\mathcal{A}$ ein Graph ist. Zeige weiter, dass $\mathcal{A}$ ein Zufallsgraph ist.

(c) Sind je zwei Zufallsgraphen, gesehen als $\{R\}$-Strukturen, elementar äquivalent? (Hinweis: Back-&-Forth.)

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$ in der Sprache $\mathcal{L}$. Gegeben eine atomare Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige, dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(b) Zeige nun, dass die obige Äquivalenz auch für jede quantorenfreie Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A gilt. Argumentiere dabei induktiv über den Aufbau von ψ.

(c) Gegeben die Formel $\theta[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei ψ quantorenfrei ist, und Elemente $a_1, \ldots, a_n$ aus A, zeige nun, dass

$$\mathcal{A} \models \theta[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \theta[a_1, \ldots a_n].$$

Gilt die Rückrichtung?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.