Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2018/2019

**Logik für Studierende der Informatik**

Blatt 4

Abgabe: 20.11.2018 14 Uhr

**Gruppennummer angeben!**

**Aufgabe 1** (4 Punkte).

Sei $\mathcal{L}_0$ eine Teilmenge der Sprache $\mathcal{L}$. Jede $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ kann in kanonischer Weise als $\mathcal{L}_0$-Struktur $\mathcal{A} \restriction \mathcal{L}_0$ betrachtet werden. Zeige durch Induktion über den Aufbau der $\mathcal{L}_0$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$, dass für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \text{ genau dann, wenn } \mathcal{A} \restriction \mathcal{L}_0 \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

**Aufgabe 2** (6 Punkte). Forme folgende Formeln in pränexe Normalform um:

(a) $\forall x \forall y \Big( \neg(x \doteq y) \longrightarrow \exists z \big( \neg(z \doteq x) \land \neg(z \doteq y) \big) \Big)$.

(b) $\forall x \forall y \Bigg( \neg(x \doteq y) \longrightarrow \forall z \exists u \Big( \big(\neg(z \doteq x) \land \neg(z \doteq y)\big) \longrightarrow (z \doteq u) \Big) \Bigg)$.

(c) $\Bigg( (g(x,y,z) \doteq 1) \longleftrightarrow \Big( \big((z \doteq 0) \land (f(x,y) \doteq 1)\big) \lor \exists w \big( (w < x + y + 1) \land \big( (x \doteq y + w) \lor (y \doteq x + w) \big) \big) \Big) \Bigg)$

**Aufgabe 3** (4 Punkte).

Eine Unterstruktur $\mathcal{A}$ der $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{B}$ heißt *elementar*, bezeichnet mit $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, falls für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und für alle $a_1, \ldots, a_n$ aus $A$ folgende Implikation gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots a_n] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots a_n].$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ folgt.

(b) Sei nun $T$ eine Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$ derart, dass es für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ gibt, so dass

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \Big( \varphi[x_1, \ldots, x_n] \longleftrightarrow \psi[x_1, \ldots, x_n] \Big).$$

.

Zeige, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ aus $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ folgt, falls beide Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Modelle von $T$ sind.

**Aufgabe 4** (6 Punkte).

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen isomorph als $\mathcal{L}'$-Strukturen?

**(Bitte wenden!)**

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ allgemeingültig ist.

---

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.