Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 5
Abgabe: 27.11.2018 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Zeige, dass die folgenden $\mathcal{L}$-Formeln allgemeingültig sind.

(a) $\Big(\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \psi)\Big)$, falls x nicht frei in ψ vorkommt.

(b) $\Big(\exists x\forall y\varphi[x,y] \to \forall y\exists x\varphi[x,y]\Big)$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Leite die folgenden $\mathcal{L}$-Formeln aus dem Hilbertkalkül (für $\mathcal{L}$) ab.

(a) $\Big(\exists x\,(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x\varphi \wedge \psi)\Big)$, falls x nicht frei in ψ vorkommt.

(b) $\Big(\exists x\forall y\,(f(y) \doteq x) \to \forall y\forall z\,(f(y) \doteq f(z))\Big)$, wobei $\mathcal{L}$ das einstellige Funktionszeichen f enthält.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$ sei T eine Theorie und χ, θ_1, θ_2 Aussagen derart, dass $(\theta_1 \to \theta_2)$ aus $T \cup \{\chi\}$ folgt. Zeige, dass

$$T \cup \{\neg\theta_2\} \models (\chi \to \neg\theta_1).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Wir arbeiten in der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen $<$ besteht. Sei $\mathcal{R}$ die $\mathcal{L}$-Struktur $(\mathbb{R},<)$. Mit $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir die Sprache $\mathcal{L} \cup \{d_r\}_{r\in\mathbb{R}}$, wobei $\{d_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ eine Menge neuer paarweise verschiedener Konstantenzeichen ist. Beachte, dass $\mathcal{R}$ in natürlicher Weise als $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur gesehen werden kann.

(a) Gegeben eine Einbettung F von $\mathcal{R}$ in die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$, zeige, dass $F(\mathbb{R})$ die Grundmenge einer Unterstruktur $F(\mathcal{R})$ von $\mathcal{M}$ ist. Ferner ist $F(\mathcal{R})$ isomorph zu $\mathcal{R}$.

(b) Sei $\mathrm{Diag}^{at}(\mathcal{R})$ die Menge aller quantorenfreien $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Aussagen, welche in $\mathcal{R}$ gelten. Zeige, dass eine $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur $\mathcal{N}$ genau dann ein Modell von $\mathrm{Diag}^{at}(\mathcal{R})$ ist, wenn die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \to & N \\ & r & \mapsto & d_r^{\mathcal{N}} \end{array}$$

eine Einbettung liefert.

(c) Sei nun $\mathrm{Diag}(\mathcal{R})$ die Menge aller $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Aussagen, welche in $\mathcal{R}$ gelten. Zeige, dass eine $\mathcal{L}(\mathbb{R})$-Struktur $\mathcal{N}$ genau dann ein Modell von $\mathrm{Diag}(\mathcal{R})$ ist, wenn für die obige Abbildung $F:\mathbb{R}\to N$ gegeben durch $r \mapsto d_r^{\mathcal{N}}$ gilt, dass $F(\mathcal{R})$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist (siehe Blatt 4, Aufgabe 3). Insbesondere ist F eine elementare Abbildung (siehe Skript).

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.