Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 7

Abgabe: 11.12.2018 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie und $\varphi[x]$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Angenommen, dass für jedes Modell $\mathcal{M}$ von T die Menge $\varphi(M) := \{m \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[m]\}$ endlich ist, zeige, dass es eine natürliche Zahl D gibt, so dass für jedes Modell $\mathcal{M}$ von T die Menge $\varphi(M)$ weniger als D Elemente hat.
Hinweis: Schreibe eine geeignete Theorie $T \subset T^*$ und benutze Kompaktheit.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen $<$.

(a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau alle linear geordneten Mengen ohne Endpunkte sind.

(b) Ist T vollständig? Gibt es eine einzige Vervollständigung?

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen E und T die $\mathcal{L}$-Theorie, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in welchen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelation auf A mit genau einer Klasse der Größe n für jedes n aus $\mathbb{N}$ ist (siehe Aufgabe 2 (b), Blatt 3).

(a) Sei $\mathcal{M}$ ein beliebiges Modell von T. Zeige, dass es ein Modell $\mathcal{N}$ von T gibt, so dass $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ und $E^{\mathcal{N}}$ eine unendliche Äquivalenzklasse hat.

Hinweis: Erweitere $\mathcal{L}$ zu einer Sprache $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$ mit einem Konstantenzeichen c und betrachte $\text{Diag}(\mathcal{M}) \cup T^*$ für eine geeignete Menge T^* von $\mathcal{L}^*$-Aussagen. Zeige mit Hilfe von Kompaktheit, dass diese Formelmenge konsistent ist und erhalte dadurch eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{N}$.

(b) Zeige, dass es ein zweites Modell $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}'$ gibt, so dass $\mathcal{N}$ zwei verschiedene unendliche $E^{\mathcal{N}}$-Äquivalenzklassen hat.

(c) Beschreibe alle abzählbaren Modelle von T. Wieviele gibt es, bis auf Isomorphie?

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L}$ wie in Aufgabe 2. Wir betrachten wieder die $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <)$ mit der natürlichen Ordnung.

a) Ist die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen von $\mathcal{Z}$ nichtleer?

b) Bildet diese Kollektion ein Back-&-Forth System?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.