Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2018/2019

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 9

Abgabe: 08.01.2019 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorräume besteht aus einem Konstantenzeichen 0, einem binären Funktionszeichen + sowie aus einstelligen Funktionszeichen $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ für die Skalarmultiplikation mit q. Jeder $\mathbb{Q}$-Vektorraum lässt sich als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur betrachten.

(a) Schreibe in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ eine Theorie T, deren Modelle genau alle $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar?

(b) Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Falls $V \neq 0$, zeige, dass es eine elementare Erweiterung V' von V (als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur) gibt, so dass $\dim_{\mathbb{Q}} V' \geq 2$.

(c) Sei nun $\mathcal{K}$ eine axiomatisierbare Klasse von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen derart, dass jeder Vektorraum V aus $\mathcal{K}$ endlichdimensional ist. Schließe daraus, daß $\mathcal{K}$ nur aus dem trivialen $\mathbb{Q}$-Vektorraum besteht.

Aufgabe 2 (8 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L} = \{P_i : i \in \mathbb{N}\}$ die Sprache, welche aus einstelligen Relationszeichen P_i besteht.

(a) Gib eine Theorie T an, in deren Modellen $\mathcal{M}$ die Kollektion $\{P_i^{\mathcal{M}} : i \in \mathbb{N}\}$ aus unendlichen, paarweise disjunkten Mengen besteht.

(b) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass jedes Modell $\mathcal{M}$ von T eine elementare Erweiterung $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ derart besitzt, dass es unendlich viele Elementen in $N \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$ gibt.

(c) Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei Modelle, in denen das Komplement von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i^{\mathcal{N}}$ unendlich ist, elementar äquivalent sind.

(d) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**

(a) Zeige, dass die Abstandsfunktion $\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass die Funktion $(x,y) \mapsto x^y$ primitiv rekursiv ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.