Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 12
Abgabe: 05.02.2020, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (16 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen $<$ sowie zwei einstelligen Funktionszeichen V und N. Betrachte die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ mit den folgenden Eigenschaften: die Grundmenge A ist unendlich und $<^{\mathcal{A}}$ ist eine lineare Ordnung. Ferner sind für jedes a aus A der *Vorgänger* $V^{\mathcal{A}}(a)$ und der *Nachfolger* $N^{\mathcal{A}}(a)$ die Elemente aus A derart, dass a das einzige Element echt zwischen ihnen ist. Insbesondere ist $V^{\mathcal{A}}(a)$ kleiner als $N^{\mathcal{A}}(a)$.

(a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse $\mathcal{K}$ an.

(b) Ist T widerspruchsfrei?

(c) Ist $\mathcal{K}$ endlich axiomatisierbar? Gibt es eine rekursive Axiomatisierung?

(d) In einem Modell $\mathcal{A}$ von T sei B eine nicht-leere Teilmenge von A. Wie sieht die von B erzeugte Unterstruktur $\langle B\rangle_{\mathcal{A}}$ aus?

(e) Zeige, dass jedes Modell $\mathcal{A}$ von T eine elementare Erweiterung $\mathcal{A}_1$ derart besitzt, dass es zwei Elemente η und ξ in A_1 mit $\eta <^{\mathcal{A}_1} a <^{\mathcal{A}_1} \xi$ für alle a aus A gibt.

In einem Modell $\mathcal{A}$ von T, setze $a \ll b$, falls jedes Element von $\langle\{a\}\rangle_{\mathcal{A}}$ echt kleiner als jedes Element von $\langle\{b\}\rangle_{\mathcal{A}}$ ist. Mit Hilfe von Kompaktheit ist es leicht zu zeigen, dass jedes Modell von T eine *reiche* elementare Erweiterung $\mathcal{A}_\infty$ besitzt: das heißt, die Struktur $\mathcal{A}_\infty$ ist nicht endlich erzeugt und für je zwei Punkte a und b aus A_∞ mit $a \ll b$ gibt es Elemente η, ξ und ϵ in A_∞ mit $\eta \ll a \ll \epsilon \ll b \ll \xi$. (Es wird hier nicht verlangt, die Existenz reicher Erweiterungen zu zeigen.)

(f) Zeige, dass es ein nicht-leeres Back-&-Forth System zwischen reichen Modellen gibt.

(g) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

(h) Sei T_1 die Menge aller $\mathcal{L}$-Aussagen, welche in der $\mathcal{L}$-Struktur $(\mathbb{Z}, x \mapsto x-1, x \mapsto x+1, <)$ gelten. Ist T_1 entscheidbar?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Eine natürliche Zahl n ist eine *Mersenne Zahl*, falls es eine Primzahl p und eine natürliche Zahl k so gibt, dass

$$n = \frac{p^k - 1}{p-1}.$$

(a) Ist die Teilmenge A der Mersenne Zahlen in der Struktur $\mathcal{N}_0 = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ definierbar?

(b) Ist A rekursiv?

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.