Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 4
Abgabe: 27.11.2019, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache mit einem 2-stelligen Relationszeichen E.

(a) Gib eine Theorie T an, deren Modelle genau alle $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, in welchen $E^{\mathcal{A}}$ eine Äquivalenzrelationen mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist und alle Äquivalenzklassen unendlich sind.

(b) Ist T konsistent?

(c) Besitzt T ein abzählbares Modell? Wie viele abzählbare Modell gibt es, bis auf Isomorphie?

HINWEIS: Nach einer Aufzählung der Grundmengen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bilde aus einem Back-&-Forth System partielle Isomorphismen F_n derart, dass F_{n+1} eine Fortsetzung von F_n ist, mit a_n in $\mathrm{Dom}(F_{n+1})$ und b_n in $\mathrm{Im}(F_{n+1})$.

Aufgabe 2 (8 Punkte).

Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, welche aus drei einstelligen Relationszeichen P_1, P_2 und P_3 besteht.

(a) Schreibe eine Theorie T, deren Modelle genau die $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$ sind, so dass die drei unendlichen Mengen $P_i^{\mathcal{A}}$, $1 \leq i \leq 3$ paarweise disjunkt sind und das Universum A überdecken.

(b) Ist die Theorie konsistent?

(c) Sind je zwei Modelle der Theorie mit Kardinalität Kontinuum isomorph?

(d) Sind je zwei Modelle der Theorie elementar äquivalent?

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur in der Sprache $\mathcal{L}$ und $c_1, \ldots, c_n$ neue Konstantenzeichen.

(a) Zeige, dass $\mathcal{A}$ sich zu einer Struktur in der Sprache $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ erweitern läßt.

(b) Sind alle solche Erweiterungen von $\mathcal{A}$ elementar äquivalent als $\mathcal{L}'$-Strukturen, wenn A zumindest 2 Elemente besitzt und $n \geq 2$?

(c) Zeige, dass die $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ genau dann allgemeingültig ist, wenn die $\mathcal{L}'$-Aussage $\varphi[c_1, \ldots, c_n]$ allgemeingültig ist.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.