Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Logik für Studierende der Informatik

Blatt 8

Abgabe: 8.01.2020, 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

Gegeben eine widerspruchsfreie Theorie T in einer Sprache $\mathcal{L}$, sei $\varphi[x]$ eine $\mathcal{L}$-Formel derart, dass in jedem Modell $\mathcal{A}$ von T die Menge

$$\varphi(\mathcal{A}) = \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi[a]\}$$

endlich ist. Zeige, dass es eine natürliche Zahl N so gibt, dass $T \vdash \exists^{\leq N} x\varphi[x]$, wobei $\exists^{\leq N} x\varphi[x]$ eine Abkürzung für die Aussage ist, welche „*Die Formel $\varphi[x]$ besitzt höchstens N viele Realisierungen*“ ausdrückt.

Aufgabe 2 (12 Punkte)**.**

Sei $\mathcal{L} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Sprache, welche aus einstelligen Relationszeichen P_n besteht. Wir betrachten die Klasse $\mathcal{K}$ der $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}$, in welchen die Kollektion $\{P_n^{\mathcal{A}} : n \in \mathbb{N}\}$ aus unendlichen, paarweise disjunkten Mengen besteht.

(a) Gib eine Axiomatisierung T der Klasse $\mathcal{K}$ an.

(b) Ist T widerspruchsfrei?

(c) Zeige mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass jedes Modell $\mathcal{A}$ von T eine elementare Erweiterung $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ derart besitzt, dass es unendlich viele Elementen in $B \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\mathcal{B}}$ gibt.

(d) Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei Modelle, in denen das Komplement von $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n^{\mathcal{B}}$ unendlich ist, elementar äquivalent sind.

(e) Schließe daraus, dass T vollständig ist.

(f) Beschreibe (informell) alle, bis auf Isomorphie, abzählbaren Modelle von T.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**

Sei T eine konsistente Theorie. Zeige, dass T genau dann vollständig ist, wenn je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.