Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Michael Lösch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Logik für Studierende
der Informatik
Blatt 9
Abgabe: 15.01.2020, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (6 Punkte).

(a) Zeige, dass jede endliche Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist.

Hinweis: Betrachte eine Einermenge.

(b) Schließe daraus, dass wenn $A \subset \mathbb{N}^n$ primitiv rekursiv ist, so auch B, falls $B \supset A$ und $B \setminus A$ endlich.

(c) Zeige, dass die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \neq y\}$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte).

(a) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{rccc} |\cdot| : & \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \mapsto & |2x-3y| \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

(b) Zeige, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (x,y) & \mapsto & x^y \end{array}$ primitiv rekursiv ist, wobei $x^0 = 1$.

(c) Schließe daraus, dass die Funktion $\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N} \\ (n,m) & \mapsto & \underbrace{n^{n^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n}}}}}}_{m \text{ Mal}} \end{array}$ primitiv rekursiv ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte).

Die Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorräume besteht aus einem Konstantenzeichen 0, einem binären Funktionszeichen + sowie aus einstelligen Funktionszeichen $(\lambda_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ für die Skalarmultiplikation mit q. Jeder $\mathbb{Q}$-Vektorraum lässt sich als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur betrachten.

(a) Schreibe in der Sprache $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$ eine Theorie T, deren Modelle genau alle nicht-trivialen $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Ist diese Theorie endlich axiomatisierbar? (Eine informelle Begründungen genügt.)

(b) Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Falls $V \neq 0$, zeige, dass es eine elementare Erweiterung V' von V (als $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}-VR}$-Struktur) und Elemente v_1 und v_2 in V' so gibt, dass keine nicht-triviale Linearkombination von v_1 und v_2 in V liegt.

(c) Mit Hilfe eines Back-and-Forth-Systems zeige, dass je zwei unendlich-dimensionale Modelle von T elementar äquivalent sind. Schließe daraus, dass T vollständig ist.

(d) Beschreibe (informell) alle, bis auf Isomorphie, abzählbaren Modelle von T.

Die Übungsblätter müssen zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter in den (mit den Nummern der Übungsgruppen gekennzeichneten) Fächern im EG des Gebäudes 51.