

Lineare Algebra I

Blatt 0

Abgabe: 9.11.2020, 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

LESEN SIE IM SKRIPT APPENDIX A SOWIE B UND VERSUCHEN SIE SICH AN DEN FOLGENDEN AUFGABEN. DIESES BLATT WIRD NICHT BENOTET, DIE ABGABE MUSS ABER IM ILIAS (ALS EINE EINZIGE PDF-DATEI) EINGEREICHT WERDEN, UM SICH MIT ILIAS VERTRAUT ZU MACHEN.

Aufgabe 1. Zeige mit Hilfe des Induktionsprinzips, dass

$$n! > 2^n$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$, wobei $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$.

Aufgabe 2. Finde und beweise induktiv eine Formel für

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{für } n > 0.$$

Aufgabe 3.

Betrachte folgende Abbildung

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto \text{Die } (n+1)\text{-te Primzahl} \end{aligned}$$

Zeige induktiv, dass $f(n) \leq 2^{2^n}$.

Hinweis: Warum gibt es unendlich viele Primzahlen? Was ist $\sum_{k=0}^n 2^k$?

Aufgabe 4.

Wir betrachten die sogenannte perforierte Ebene $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Die Kollektion aller Geraden, welche durch (den „fehlenden“ Punkt) $(0, 0)$ gehen, zerlegt die Menge X (siehe Bemerkung nach der Definition B.4 im Skript). Sei E die von dieser Zerlegung induzierte Äquivalenzrelation auf X und $[(a, b)]_E$ die Äquivalenzklasse des Punktes (a, b) in X .

- (a) Sind die Äquivalenzklassen $[(0, 1)]_E$ und $[(1, 0)]_E$ disjunkt?
- (b) Bildet der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ein Repräsentantensystem für E ?
- (c) Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} g: X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} x/y, & \text{falls } y \neq 0 \\ \pi, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

kompatibel mit E ist. Ist die induzierte Abbildung $\bar{g}: X/E \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv? Und surjektiv? (Siehe Beispiel 1.23 im Skript für die Definition.)