

Lineare Algebra I

Blatt 9

Abgabe: 01.02.2021, 10 Uhr

Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (4 Punkte). Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte). Für reelle Zahlen a, b, c und d betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ bc+bd+cd & ac+ad+cd & ab+ad+bd & ab+ac+bc \\ bcd & acd & abd & abc \end{pmatrix}$$

- (a) Was ist die Determinante von A (ohne die Regel von Sarrus zu verwenden)?
- (b) Begründe, dass A genau dann regulär ist, wenn a, b, c und d paarweise verschieden sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei A eine $r \times r$ -Matrix mit $A^n = \mathbf{0}$ für ein $n > 0$, wobei $\mathbf{0}$ die $r \times r$ -Nullmatrix ist.

- (a) Ist A regulär?
- (b) Ist $A + \mathbf{Id}_r$ regulär?

Hinweis: Geometrische Reihe.

Aufgabe 4 (6 Punkte).

Für reelle Zahlen a_1, \dots, a_n nicht alle Null betrachte die Matrix $A = (a_i \cdot a_j)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

- (a) Was ist die Dimension von $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i = 0\}$? Was ist $F_A(u)$ für u aus U ?
- (b) Zeige, dass es eine Basis gibt, bezüglich welcher (sowohl im Definitions- als auch im Bildbereich) F_A die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sum_{i=1}^n a_i^2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Ist A regulär?