

Formale Logik

Blatt 7

Abgabe: 13.12.2021, 14 Uhr

Gruppennummer angeben!

Das Blatt darf zu zweit bearbeitet und eingereicht werden.

Aufgabe 1 (11 Punkte).

Christopher, Maya, Melissa, Pinar und Tobias sind die Bewohner eines Hauses:

| | |
|--------------|-------------|
| Dachgeschoss | Christopher |
| 3.OG | Melissa |
| 2.OG | Maya |
| 1.OG | Pinar |
| Erdgeschoss | Tobias |

Wir sagen, dass zwei Bewohner benachbart sind, wenn einer der beiden Bewohner direkt über oder direkt unter dem anderen wohnt.

In der Sprache \mathcal{L} , welche aus dem zweistelligen Relationszeichen R sowie zwei Konstantenzeichen c und d besteht, betrachten wir die Struktur \mathcal{M} mit Universum die Kollektion von Individuen

Christopher, Pinar, Maya, Melissa und Tobias

und den Interpretationen

$$R^{\mathcal{M}}(u, v) \iff u \text{ und } v \text{ sind benachbart}$$

sowie

$$c^{\mathcal{M}} = \text{Melissa} \quad \text{und} \quad d^{\mathcal{M}} = \text{Tobias}$$

(a) Repräsentiere die folgenden Aussagen als \mathcal{L} -Formeln:

- Keine Person ist zu sich selbst benachbart.
- Tobias hat genau eine Person als Nachbar.
- Melissa hat genau zwei Nachbarn.
- Es gibt nur eine Person außer Tobias, welche nur einen Nachbarn hat.

(b) Welche der folgenden \mathcal{L} -Aussagen gelten in \mathcal{M} ?

- $\forall x \exists y R(x, y)$
- $\exists x \exists y \left((R(c, x) \wedge R(x, y)) \wedge R(y, d) \right)$
- $\left(\exists x (R(c, x) \wedge R(x, d)) \rightarrow \forall y \exists z R(y, z) \right)$

Aufgabe 2 (3 Punkte).

Wir betrachten die Sprache $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ mit den beiden einstelligen Relationszeichen P und Q . Begründe, dass die \mathcal{L} -Aussagen $\forall x ((P(x) \wedge Q(x)))$ und $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$ logisch äquivalent sind.

Bitte wenden!!

ABGABE ZWISCHEN 14:00-14:20 UHR IN DER FACHBEREICHSBIBLIOTHEK PHILOSOPHIE IM KG I.
ALTERNATIV KÖNNEN SIE IHRE ABGABE ZU EINEM FRÜHEREN ZEITPUNKT IN DEN BRIEFKASTEN
IHRER ÜBUNGSGRUPPE IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS LEGEN.

Aufgabe 3 (6 Punkte).

Wir betrachten die Sprache \mathcal{L} , welche aus den beiden einstelligigen Prädikaten P und Q besteht. In dieser Sprache betrachten wir zwei Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} , welche beide als Universum nur die Kollektion von Individuen a, b, c und d haben. Die Elemente aus \mathcal{A} , welche in der Interpretation von P (in \mathcal{A}) liegen sind genau a und b , und dasselbe gilt auch für \mathcal{B} . Nun, die Elemente in \mathcal{A} , welche in der Interpretation von Q liegen, sind a, b und c , wobei in \mathcal{B} die Elemente, welche in der Interpretation von Q liegen, genau a, c und d sind.

Welche der Formeln

$$\varphi = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \text{ und } \chi = (\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x))$$

gelten in \mathcal{A} und welche in \mathcal{B} ?

Gibt es eine \mathcal{L} -Struktur mit Universum $\{a, b, c, d\}$, in welcher die Formel φ gilt, jedoch χ nicht?