# Grundlagen Abelsche Gruppen

Lutz Strüngmann

October 29th, 2009

## 1 Definitionen

**Definition 1.1.** *Eine* **abelsche Gruppe** *ist eine Gruppe* $(G, +, 0)$*, deren Verknüpfung* $+$ *kommutativ ist.*

Die einfachsten Beispiele sind etwa die Gruppe der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und die Gruppe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ jeweils mit der gewöhnlichen Addition.

**Definition 1.2.** *Eine abelsche Gruppe heißt*

- **torsion***, falls jedes Element* $\neq 0$ *endliche Ordnung hat*
- **torsions-frei***, falls jedes Element* $\neq 0$ *unendliche Ordnung hat*
- **gemischt***, falls sie weder torsion noch torsions-frei ist.*

Offensichtlich sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ torsions-frei, aber zum Beispiel ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für jedes $n$ torsion, ja sogar **beschränkt**, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nG = 0$. Hierbei ist $nG = \{ng : g \in G\}$. $\mathbb{Z}$ und die Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$ nennt man **zyklische Gruppen**.

Ist $G$ torsions-frei, so ist $G$ eine Untergruppe eines Vektorraums über $\mathbb{Q}$, nämlich $G \otimes \mathbb{Q}$ (die **teilbare Hülle** von $G$).

**Definition 1.3.** *Sei* $G$ *eine gemischte abelsche Gruppe. Dann heißt*

- $t(G) = \{g \in G : g \text{ hat endliche Ordnung }\}$ *der* **Torsionsanteil** *oder die* **Torsionsuntergruppe** *von* $G$
- $G/t(G)$ *heißt der* **torsions-freie Anteil** *von* $G$

Sowohl $t(G)$ also auch $G/t(G)$ sind wiederum abelsche Gruppen. Eine abelsche Gruppe $G$ **spaltet**, falls $G \cong t(G) \oplus G/t(G)$ ist.

**Definition 1.4.** *Ist* $G$ *eine torsions-freie abelsche Gruppe, so ist die Mächtigkeit einer maximal linear unabhängigen Teilmenge von* $G$ *der* **Rang rg(G)** *von* $G$*. Dies ist gleich der Dimension* $dim_{\mathbb{Q}}(G \otimes \mathbb{Q})$*.*

Alle Untergruppen von $\mathbb{Q}$ haben zum Beispiel Rang 1.

## 2 Endlich erzeugte Gruppen

Eine abelsche Gruppe $G$ heißt **endlich erzeugt**, falls endlich viele Element $g_1, \ldots, g_n \in G$ existieren mit

$$G = \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$$

Offensichtlich sind alle zyklischen Gruppen endlich erzeugt.

**Theorem 2.1.** *Ist $G$ eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so ist sie direkte Summe von zyklischen Gruppen.*

Die endlich erzeugten abelschen Gruppen sind damit uninteressant für uns.

## 3 Teilbare Gruppen

**Definition 3.1.** *Eine abelsche Gruppe $G$ heißt* **teilbar**, *falls $nG = G$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Offensichtlich sind beliebige direkte Summen $\bigoplus_{i \in \kappa} \mathbb{Q}$ teilbar und torsions-frei. Aber auch die folgende **Prüfergruppe** ist teilbar für jede Primzahl $p$.

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \langle x_0, x_1, x_2, \ldots \rangle$$

wobei folgende Relationen gelten sollen:

$$px_0 = 0 \quad px_{n+1} = x_n \textit{ für } n \geq 1$$

**Theorem 3.2.** *Ist $G$ eine teilbare Gruppe, so ist $G$ von der Form*

$$\bigoplus_{\alpha < \kappa_0} \mathbb{Q} \oplus \bigoplus_p \bigoplus_{\alpha < \kappa_p} \mathbb{Z}(p^\infty)$$

*für eindeutig bestimmte Kardinalzahlen $\kappa_0$ und $\kappa_p$.*

Enthält eine abelsche Gruppe $G$ keine teilbaren Untergruppen, so heißt sie **reduziert**. Jede abelsche Gruppe $G$ hat eine eindeutig bestimmte maximale teilbare Untergruppe $D_G$, die abspaltet. Das Komplement ist jedoch nicht eindeutig bestimmt !

**Theorem 3.3.** *Ist $G$ eine abelsche Gruppe, so gilt*

$$G = D_G \oplus R_G$$

*für eine eindeutig bestimmte teilbare Untergruppe $D_G$ und eine reduzierte Untergruppe $R_G$ von $G$.*

## 4 Freie Gruppen

Eine abelsche Gruppe der Form $\bigoplus_{\alpha < \kappa} \mathbb{Z}$ für eine Kardinalzahl $\kappa$ heißt **freie Gruppe**.

**Theorem 4.1.** *Es gelten die folgenden wichtigen Eigenschaften von freien Gruppen:*

- *Untergruppen von freien Gruppen sind frei;*

- *Ist $H \subseteq G$ und $H/G$ frei, so gilt $G = H \oplus H'$ für eine freie Untergruppe $H'$ von $G$.*

Ein schönes Kriterium für Freiheit ist der Satz von Pontryagin.

**Theorem 4.2.** *Eine abzählbare Gruppe ist genau dann frei, wenn jede Untergruppe endlichen Ranges frei ist.*

Etwas allgemeiner als die freien Gruppen sind die $\aleph_1$-freien Gruppen.

**Definition 4.3.** *Eine abelsche Gruppe $G$ heißt* **$\aleph_1$-frei**, *falls jede abzählbare Untergruppe von $G$ frei ist.*

Zum Beispiel ist die Baer-Specker Gruppe $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ $\aleph_1$-frei, aber nicht frei !

# 5 Rationale Gruppen und Reinheit

Neben $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ haben die rationalen Zahlen natürlich noch mehr Untergruppen. Diese nennt man **rationale Gruppen**. Sie haben Rang 1.

Die rationalen Gruppen sind durch **Typen** von Baer klassifiziert worden und bereits hinreichend kompliziert.

**Definition 5.1.** *Eine direkte Summe von rationalen Gruppen heißt* **vollständig zerlegbare Gruppe**. *Eine endliche Erweiterung einer vollständig zerlegbaren Gruppe endlichen Ranges heißt* **fast vollständig zerlegbare Gruppe**.

Eine fast vollständig zerlegbare Gruppe ist also von der Form

$$G = \left\langle \bigoplus_{i=1}^{n} R_i, g_1, \dots g_k \right\rangle$$

mit $R_i \subseteq \mathbb{Q}$ und es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $ng_i \in D = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$ für alle $i = 1, \cdots, k$.

**Definition 5.2.** *Eine Untergruppe $H \subseteq G$ heißt* **rein** *in $G$, falls $nH = nG \cap H$ gilt für alle $N \in \mathbb{N}$.*

Direkte Summanden sind rein, jedoch gilt die Umkehrung nicht. Zum Beispiel ist $t(G)$ immer rein in $G$. Die rationalen Zahlen haben als reine Untergruppe nur sich selbst.

# 6 Unzerlegbare Gruppen

Im Gegensatz zu den endlich erzeugten Gruppen, den freien Gruppen, den teilbaren Gruppen und den vollständig zerlegbaren Gruppen, die aus vielen *kleinen Bausteinen* zusammengesetzt sind, gibt es auch Gruppen, die völlig konträr aussehen.

**Definition 6.1.** *Eine abelsche Gruppe $G$ heißt* **unzerlegbar**, *falls aus $G = H \oplus H'$ immer $H = 0$ oder $H' = 0$ folgt.*

Offensichtlich sind rationale Gruppen unzerlegbar vom Rang 1. Bereits unter den fast-vollständig zerlegbaren Gruppen findet man jedoch unzerlegbare Beispiele beliebig großen endlichen Ranges.

## References

[1] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups* – Vol. 1&2, Academic Press, New York (1970, 1973).

[2] R. Göbel and J. Trlifaj, *Approximation Theory and Endomorphism Algebras*, Expositions in Mathematics **41** Walter de Gruyter, Berlin (2006).

Lutz Strüngmann
Institut für Mathematik,
Abteilung für Mathematische Logik,
Albert-Ludwigs Universität Freiburg,
Freiburg
e-mail: Lutz.Struengmann@math.uni-freiburg.de