Aufgabe 1 *(Produktmannigfaltigkeiten)*
Seien M, N topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n. Dann ist $M \times N$ (auf offensichtliche Weise, nämlich wie?) eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$. Berechnen Sie auch die Kartenwechsel.

Aufgabe 2 *(n-Sphäre)*
Zeigen Sie, dass $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^{n+1}$ und den stereographischen Projektionen $\varphi_\pm : \mathbb{S}^n \backslash \{\pm e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 3 *($\mathbb{R}P^n$)*
Die Menge aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ heißt $\mathbb{R}P^n$ (reell projektiver Raum der Dimension n). Für $x \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ sei $[x]$ die Ursprungsgerade durch x, und

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\},$$

$$\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, \varphi_i([x]) = \frac{1}{x_i}(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1}).$$

Das Dach bedeutet, dass dieser Eintrag weggelassen wird. Zeigen Sie dass $\mathbb{R}P^n$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Im einzelnen:

(1) Es gibt auf $\mathbb{R}P^n$ genau eine Topologie, so dass die U_i offen und die φ_i homeomorph sind (Satz 1.1 verwenden).

(2) Diese Topologie hat abzählbare Basis.

(3) Die Topologie ist Hausdorffsch.

Die Aufgaben sollen am Donnerstag in der Übung begonnen werden und danach von Ihnen aufgeschrieben werden. Abgabe ist am Montag, 28.10.2013, in der Vorlesung.