Aufgabe 1 *(Hölderräume)*
Sei $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ und $u \in C^{2,1}(G)$. Definiere

$$||u||_{C^{2,1,\alpha}(G)} = ||u||_{C^{2,1}(G)} + [D^{2,1}u]_{\alpha,G}\,.$$

Zeigen Sie, dass $C^{2,1,\alpha}(G) = \{u \in C^{2,1}(G), ||u||_{C^{2,1,\alpha}(G)} < \infty\}$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 2
Sei $\epsilon > 0$ und $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $g(t) = 1$ für $t \geq 1$, $g(t) = 0$ für $t \leq -1$, und $g'(t) > 0$ auf $\mathbb{R}$. Definiere $\phi_\epsilon(r) = -\epsilon \log(r)$, für $r \in \mathbb{R}_+$, und für $x \in \mathbb{R}^n$ betrachte $\eta_\epsilon(x) = g(\phi_\epsilon(|x|))$. Zeigen Sie, dass

$$\eta_\epsilon(0) = 1\,, \quad D\eta_\epsilon(0) = 0\,, \quad D^2\eta_\epsilon(0) = 0$$

und dass es ein $0 < C < \infty$ gibt, so dass

$$|x||D\eta_\epsilon(x)| + |x|^2|D^2\eta_\epsilon(x)| \leq C\epsilon\,.$$

Setze $v_\epsilon(x) = \eta_\epsilon(x)h(x)$, wobei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein harmonisches quadratisches Polynom ist. Zeigen Sie, dass

$$0 < ||\Delta v_\epsilon||_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon}||D^2 v_\epsilon||_{L^\infty}\,.$$

Schliessen Sie, dass es ein $u_\epsilon \in C_c^\infty(B_1(0))$ gibt, mit

- $1 = ||\Delta u_\epsilon||_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon}||D^2 u_\epsilon||_{L^\infty}$,
- $||u_\epsilon||_{L^\infty} \leq \frac{1}{2n}$;

wobei $B_1(0) \in \mathbb{R}^n$ der Einheitsball mit Zentrum im 0 ist.

Abgabe Montag 10.02.2014 in der Vorlesung.