

Aufgabe 1 (*Das Tangentialbündel von \mathbb{S}^n*)

Vervollständigen Sie den in der Vorlesung gegebenen Beweis, dass $T\mathbb{S}^n$ ein Vektorbündel ist.

Aufgabe 2 (*Das Möbiusband*)

Betrachten Sie auf $\hat{M} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die folgende Äquivalenzrelation

$$(x, s) \sim (y, t) \iff x - y = 2k\pi, \text{ für } k \in \mathbb{Z} \text{ und } t = (-1)^k s.$$

- Zeigen Sie (mittels Satz 1.1 der Vorlesung), dass der Quotient $M := \hat{M} / \sim$ eine Struktur von differenzierbare Mannigfaltigkeit besitzt.
- Zeigen Sie, dass M ein eindimensionales Vektorbündel auf \mathbb{S}^1 ist.
- Beweisen Sie, dass M kein triviales Vektorbündel ist.