
Aufgabe 1 *(normale Koordinaten)*
Sei h_{ij} eine Riemannsche Metrik auf einer Umgebung des Nullpunkts im $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie einen lokalen Diffeomorphismus der Form

$$\phi(x) = x^k e_k + \frac{1}{2} C^k_{ij} x^i x^j e_k, \qquad \text{wobei } C^k_{ij} = C^k_{ji},$$

so dass für die Pullback-Metrik $g = \phi^* h$ gilt:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{ und } \quad \partial_i g_{jk}(0) = 0 \quad \text{ für alle } i, j, k. \tag{1}$$

Anwendung. Zu jedem $p \in (M, g)$ gibt es lokale Koordinaten $\varphi : U \to \varphi(U)$, $\varphi(p) = 0$, so dass (1) gilt.

Aufgabe 2 *(harmonische Formen auf T^n)*
Sei $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ der $n-$dimensionale Torus mit der Standardmetrik. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\Delta\omega = 0 \quad \text{für} \quad \omega \in \Omega^p(T^n)\,,\ p = 0, ..., n\,.$$

Abgabe Montag 02.12.2013 in der Vorlesung.