Aufgabe 1 *(Gardingsche Ungleichung)*
Betrachten Sie auf $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N)$ den linearen Operator

$$(Lu)_i = a_{ij}^{\alpha\beta} \partial^2_{\alpha\beta} u^j \qquad \text{für } i = 1, \ldots, N,$$

mit $a_{ij}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ konstant.

(1) Berechnen Sie das Symbol $\sigma_L(x,\xi) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ für $(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
(4 Punkte)

(2) Es gelte die Bedingung

$$\langle \sigma_L(x,\xi)\eta, \eta\rangle > 0 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\},\ \eta \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

Zeigen Sie dass L elliptisch ist, und dass die Bedingung im Fall $N = 1$ sogar äquivalent zur Elliptizität ist (4 Punkte).

(3) Es gelte für ein $\lambda > 0$ die Bedingung von Legendre-Hadamard

$$\langle \sigma_L(x,\xi)\eta, \eta\rangle \geq \lambda |\xi|^2 |\eta|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,\ \eta \in \mathbb{R}^N.$$

Zeigen Sie für $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Gardingsche Ungleichung (4 Punkte)

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}^{\alpha\beta} \partial_\alpha u^i \partial_\beta u^j \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |Du|^2.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Fouriertransformation

$$\hat{u}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\langle p,x\rangle}\, dx.$$

Aufgabe 2 *(Hodge-Laplace für Riemannsche Flächen)*(4 Punkte)
Betrachten Sie auf $U \subset \mathbb{R}^2$ die konforme Riemannsche Metrik $g_{ij} = e^{2u}\delta_{ij}$ mit $u \in C^1(U)$. Berechnen Sie die Operatoren d_g^* und Δ_g auf p-Formen mit $p = 0, 1, 2$ (möglichst unter Verwendung der Operatoren d^* und Δ bzgl. der Standardmetrik.)

Abgabe Montag 9.12.2013 in der Vorlesung.