Aufgabe 1 *(Beweis von Satz 6.4: Ergänzung)* (4 Punkte)
Folgern Sie aus Satz 6.3(3) und Satz 6.5 die Abschätzung

$$\|\omega\|_{W^{2,2}} \leq C\|\Delta_g \omega\|_{L^2} \quad \text{für } \omega \in W^{2,2}(\Lambda^p TM) \text{ mit } \omega \perp_{L^2_g} H^p(M).$$

Vervollständigen Sie damit den Beweis von Satz 6.4.

Aufgabe 2 *(Wärmeleitungsgleichung)*(4 Punkte)
Sei (M, g) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $\omega = \omega(x, t)$ sei glatte Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \Delta_g \omega = 0 \quad \text{in } (0, T) \times M, \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

Zeigen Sie

(1) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2_{L^2} = -\big(\|d\omega\|^2_{L^2} + \|d^*_g \omega\|^2_{L^2}\big)$,

(2) $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|d\omega\|^2_{L^2} = -\|d^*_g d\omega\|^2_{L^2}$ und $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|d^*_g \omega\|^2_{L^2} = -\|dd^*_g \omega\|^2_{L^2}$.

Folgern Sie, dass das Anfangswertproblem höchstens eine glatte Lösung hat.

Aufgabe 3 *(Laplace-Operator auf Funktionen)*(4 Punkte)
Betrachten Sie auf (M, g) kompakt das Problem

$$\Delta_g u = \operatorname{div}_g \operatorname{grad}_g u = f \quad \text{mit } f \in L^2(M).$$

(1) Wie lautet die schwache Formulierung des Problems?

(2) Für welche f existiert eine schwache Lösung?

(3) Formulieren Sie einen Regularitätssatz, abhängig von der Regularität der Daten g und f.

Abgabe Montag 16.12.2013 in der Vorlesung.