Aufgabe 1 *(Fouriertransformation)* (4 Punkte)
Lesen Sie einen Beweis der Fourier-Inversionsformel (Satz von Plancherel).
Hinweis. Zum Beispiel im Skript Analysis III, Seiten 102–106.

Aufgabe 2 *(Normalenbündel)* (4 Punkte)
Sei $f : \Sigma \to \mathbb{R}^m$ eine n-dimensionale Immersion und $k = m - n$. Wir definieren

$$N = \{(p, v) \in \Sigma \times \mathbb{R}^m : v \perp \text{Bild}\, Df(p)\},$$

und wählen $\pi : N \to \Sigma$, $\pi(p, v) = p$.

(1) Konstruieren Sie auf N die Struktur eines lokal trivialen Vektorbündels vom Rang k (lokale Trivialisierungen, am besten mit Orthonormalbasen).

(2) Die Einschränkung des Standardskalarprodukts liefert eine Metrik auf N. Zeigen Sie, dass $\nabla\nu := (D\nu)^\perp$ ein metrischer Zusammenhang auf N ist.

Aufgabe 3 *(Lipschitzfunktionen)* (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie:

$$u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ lokal Lipschitz} \quad \Leftrightarrow \quad u \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega).$$

Hinweis. Für $\Leftarrow$ ist ein lokal (Lipschitz-) stetiger Repräsentant zu bestimmen.

Aufgabe 4 *(Ein nichttriviales Normalenbündel)* (4 Punkte)
Das Möbiusband M kann definiert werden als Quotient $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\sim$ mit

$$(x, s) \sim (y, t) \quad \Leftrightarrow \quad x - y = 2k\pi,\ t = (-1)^k s \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie: die Einbettung $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to M$, $f(x) = (x, 0)$, besitzt keine stetige, globale Einheitsnormale $\nu : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to TM$.
Hinweis. vgl. Serie 2, Aufgabe 2.

Abgabe Montag 08.01.2014 in der Vorlesung.