Sobolevräume (Auszug Funktionalanalysis 1, WS 2000)

Ernst Kuwert

Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Inhaltsverzeichnis

1 Sobolevräume

Definition 1.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Eine Funktion $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ heißt schwache Ableitung von u nach x_i, wobei $1 \leq i \leq n$, falls gilt*

$$\int_\Omega u\partial_i \eta = -\int_\Omega g\eta \quad \text{für alle } \eta \in C^\infty_c(\Omega). \tag{1.1}$$

Notation: $\partial_i u = g$ schwach.

Bemerkungen:

(1) Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt, falls existent. Denn gilt (1.1) für zwei Funktionen $g_1, g_2 \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so folgt mit $g = g_1 - g_2$

$$\int_\Omega g\eta = \int_\Omega g_1\eta - \int_\Omega g_2\eta = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C^\infty_c(\Omega),$$

und hieraus $g \equiv 0$ nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung. Insbesondere stimmen also schwache und klassische Ableitung überein, falls $u \in C^1(\Omega)$.

(2) Falls $\partial_i u = g$ und $\partial_i v = h$ schwach auf Ω, so folgt für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\partial_i(\alpha u + \beta v) = \alpha g + \beta h \text{ auf } \Omega.$$

(3) Analog sind schwache Ableitungen höherer Ordnung definiert: sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Dann setzen wir:

$$D^\alpha u = g \text{ schwach} \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega u D^\alpha \eta = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\eta \quad \text{für alle } \eta \in C^\infty_c(\Omega).$$

(4) Aus $D^\alpha u = v$, $D^\beta v = w$ schwach mit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ folgt $D^{\alpha+\beta} u = w$ schwach, denn es gilt

$$\int_\Omega u D^{\alpha+\beta}\eta = \int_\Omega u D^\alpha(D^\beta \eta) = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(D^\beta \eta) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int_\Omega w\eta.$$

Beispiel 1.1 *Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt die Funktion $u(x) = |x|^\alpha$ schwache Ableitungen in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$? Einzig möglicher Kandidat für $\partial_i u$ ist $g_i(x) = \alpha\, |x|^{\alpha-1} \frac{x_i}{|x|}$, und es gilt*

$$g_i \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1 - n.$$

Sei nun $\alpha > 1 - n$. Dann folgt für $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ mit dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
\int u(x)\partial_i\eta(x)\,dx &= \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} u(x)\partial_i\eta(x)\,dx \\
&= \lim_{\varrho \downarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} \partial_i(u\eta)(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} g_i(x)\eta(x)\,dx \right) \\
&= \lim_{\varrho \downarrow 0} \left(-\int_{\partial B_\varrho(0)} u(x)\eta(x)\frac{x^i}{\varrho}\,d\mu(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varrho(0)} g_i(x)\eta(x)\,dx \right) \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} g_i(x)\eta(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Also gilt $\partial_i u = g$ schwach im Fall $\alpha > 1 - n$.

Definition 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p \leq \infty$.*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega) : \partial_i u \in L^p(\Omega) \text{ für } 1 \leq i \leq n\} \\ \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Allgemeiner werden Sobolevräume mit höherer Ableitungsordnung wie folgt eingeführt:

$$\begin{aligned} u \in W^{k,p}(\Omega) &\Leftrightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \text{für } |\alpha| \leq k \\ u \in W^{k,p}_{\text{loc}}(\Omega) &\Leftrightarrow D^\alpha u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad \text{für } |\alpha| \leq k \end{aligned}$$

Satz 1.1 *$W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum.*

Beweis: Sei u_k Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $u_k, \partial_i u_k$ sind Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$ $\Rightarrow$ $u_k \to u, \partial_i u_k \to g_i$ in $L^p(\Omega)$ (Fischer-Riesz).
Für $\eta \in C^\infty_c(\Omega)$ folgt

$$\int u \, \partial_i \eta = \lim_{k\to\infty} \int u_k \, \partial_i \eta = -\lim_{k\to\infty} \int (\partial_i \, u_k)\eta = -\int g_i \eta.$$

Also gilt $\partial_i u = g_i$ schwach, und $u \in W^{1,r}(\Omega)$ sowie $u_k \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. $\square$
Viele Aussagen über Sobolevfunktionen lassen sich durch Glättung beweisen.

Satz 1.2 (Glättung auf $L^p(\mathbb{R}^n)$) *Sei $\eta \in \mathbb{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $\eta \geq 0$, mit $\operatorname{spt} \eta \subset \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$. Setze $\eta_\varrho(x) = \varrho^{-n} \eta \left(\frac{x}{\varrho}\right)$ für $\varrho > 0$ und*

$$u_\varrho(x) = \eta_\varrho * u(x) = \int \eta_\varrho(x-y)\, u(y)\, dy \text{ für } u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) $(u_\varrho) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *und* $D^\alpha u_\varrho = \varrho^{-|\alpha|}(D^\alpha u)_\varrho * u$.

(2) $\|u_\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ *für* $1 \leq p \leq \infty$

(3) $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p < \infty$ $\Rightarrow$ $\|u_\varrho - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ *mit* $\varrho \searrow 0$

(4) $n \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\Rightarrow$ $u_\varrho \to u$ *schwach in* L^∞, *und* $u_{\varrho_i} \to u$ *punktweise fast überall für eine Teilfolge.*

Beweis:
(1) Folgt aus den Sätzen über Parameterintegrale
(2)
$$\begin{aligned} \int |u_\varrho(x)|^p \, dx &= \int \left| \int \eta_\varrho(x-y)\, u(y)\, dy \right|^p dx \\ \text{(Hölder)} &\leq \iint |u(y)|^p \, \eta_\varrho(x-y)\, dy\, dx \\ &= \int |u(y)|^p \int \eta_\varrho(x-y)\, dx\, dy \\ &= \|u\|^p_{L^p}. \end{aligned}$$
(3) Für $z \in \mathbb{R}^n$ sei $\tau_z(x) = x + z$. Wir zeigen erst

$$p < \infty \Rightarrow \|u \circ \tau_z - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \quad \text{mit } z \to 0. \tag{1.2}$$

Wähle dazu $v \in C^0_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|u - v\|_{L^p} < \frac{\varepsilon}{3}$. Es folgt

$$\|u \circ \tau_z - u\|_{L^p} \le \underbrace{\|(u-v) \circ \tau_z\|_{L^p}}_{<\varepsilon/3} + \underbrace{\|v \circ \tau_z - v\|_{L^p}}_{\to 0 \text{ mit } z \to 0} + \underbrace{\|v - u\|_{L^p}}_{<\varepsilon/3},$$

wegen $v \circ \tau_z \to v$ gleichmäßig und spt v kompakt.
Jetzt schätze wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\int |u_\varrho(x) - u(x)|^p \, dx \quad &= \int \Big| \int \eta_\varrho(x-y)\big(u(y) - u(x)\big)\, dy \Big|^p \, dx \\
\text{(Hölder)} \quad &\le \iint \eta_\varrho(x,y)\, |u(y) - u(x)|^p \, dy\, dx \\
y = x - \varrho z \quad &= \iint \eta(z)\, |u(x - \varrho z) - u(x)|^p \, dz\, dx \\
&= \int \eta(z) \int |u(x - \varrho(z) - u(x)|^p \, dx\, dz \\
&= \int \eta(z \underbrace{\|u \circ \tau_{-\varrho z} - u\|^p_{L^p}}_{\to 0 \text{ punktweise für } \varrho \searrow 0} .
\end{aligned}$$

Majorante ist $C\|u\|^p_{L^p}$ (= Konstante).

(4) Die zweite Aussage ist klar, da $u_\varrho \to u$ lokal in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p < \infty$.
Weiter folgt für $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta(x) = \eta(-x)$:

$$\begin{aligned}
\int u_\varrho(y)\, v(y)\, dy \quad &= \int u(x) \int \eta_\varrho(y - x)\, v(y)\, dy\, dx \\
&= \int u(x) (\overline{\eta}_\varrho * v)(x)\, dx \\
&\overset{\text{nach (3)}}{\longrightarrow} \int u(x)\, v(x)\, dx.
\end{aligned}$$

□

Lemma 1.1 *Sei $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ für $1 \le p < \infty$ und η wie in Satz 1.2.*
Auf $\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \varrho\}$ ist $u_\varrho = \eta_\varrho * u$ wohldefiniert. Für $p < \infty$ gilt

$$\|u_\varrho - u\|_{L^p(\Omega')} \overset{\varrho \searrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{für alle } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Beweis: Sei oBdA $\Omega' = \Omega_\sigma$ für ein $\sigma > 0$. Setze

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in \Omega_{\sigma/2} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega_{\sigma/2}. \end{cases}$$

Es folgt

$$\eta_\varrho * u(x) \int_{B_1(0)} \eta(z)\, u(\underbrace{x - \varrho z}_{\in \Omega_{\sigma/2}})\, dz = \eta_\varrho * \widetilde{u}(x).$$

Also gilt

$$\|u - u_\varrho\|_{L^p(\Omega_\sigma)} \le \|\widetilde{u} - (\widetilde{u})_\varrho\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overset{\varrho \searrow 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

□

Folgerung 1.1 (Fundamentallemma der Variationsrechnung)
Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}$ *mit* $\int u\varphi \geq 0 \ \forall \varphi \in \mathbb{C}^\infty_c(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. *Dann ist* $u(x) \geq 0$ *für fast alle* $x \in \Omega$.

Beweis: Sei $0 < \varrho < \sigma$, also u_ϱ auf Ω_σ definiert, und $\varphi \in C^\infty_c(\Omega_\sigma)$, $\varphi \geq 0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int u_\varrho \varphi &= \iint \eta_\varrho(x-y)\, u(y)\, \varphi(x)\, dy\, dx \\ &= \int u(y) \int \eta_\varrho(x-y)\, \varphi(x)\, dx\, dy \\ &= \int u(y)\, \overline{\eta_\varrho} * \varphi(y)\, dy \geq 0, \end{aligned}$$

da $\overline{\eta_\varrho} * \varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^+_0)$. Da u_ϱ stetig, folgt leicht $u_\varrho u \geq 0$ auf Ω_σ. Wegen $u_{\varrho_i} \to u$ punktweise fast überall, folgt $u \geq 0$. □

Lemma 1.2 (Glättung in $W^{1,p}(\Omega)$) *Für* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt:*
(1) $\partial_i(\eta_\varrho * u) = \eta_\varrho * \partial_i u$ *auf* Ω_ϱ
(2) $p < \infty$, $\Omega' \subset\subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \eta_\varrho * u \to u$ *in* $W^{1,p}(\Omega')$.

Beweis: (2) folgt aus (1) mit Lemma 1.1.

$$\begin{aligned} \partial_i(\eta_\varrho * u)(x) &= \int \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \eta_\varrho(x-y) \right) u(y)\, dy \\ &= -\int \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\, \eta_\varrho(x-y) \right) u(y)\, dy \\ \text{(Def. schwache Ableitung)} \quad &= \int \eta_\varrho(x-y)\, \partial_i u(y)\, dy \\ &= (\eta_\varrho * \partial_i u)(x). \end{aligned}$$

□

Lemma 1.3 *Seien* $u, v \in W^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)$. *Dann ist* $ur \in W^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)$ *und es gilt*

$$\partial_i(uv) = (\partial_i)v + u(\partial_i v).$$

Beweis: Wir berechnen für $\eta \in C^\infty_c(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv\, \partial_i \eta &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int u(\eta_\varrho * v)\, \partial_i \eta \\ &= \lim_{\varrho \searrow 0} \int u\big[\partial_i\big((\eta_\varrho * v)\eta\big) - \partial_i(\eta_\varrho * v)\eta\big] \\ &= \lim_{\varrho \searrow 0} \Big(-\int \big[(\partial_i u)\, \eta_\varrho * v + u(\eta_\varrho * \partial_i v)\big]\eta \Big) \\ &= -\int \big((\partial_i u)v + u(\partial_i v)\big)\eta. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 1.3 (Meyers-Serrin) *Für $1 \leq p < \infty$ gilt:*

(1) $C_c\infty(\mathbb{R}^n)$ *ist dicht in* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

(2) $W^{1,p} \cap C^\infty(\Omega)$ *ist dicht in* $W^{1,p}(\Omega)$.

BEWEIS:

(1) Wähle Abschneidefunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Setze $\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{x}{R}\right)$ und $U_R(x) = \varphi_R(x)\, u(x)$. Aus Lemma **??** folgt

$$\begin{aligned} & \partial_i u_R(x) = \varphi_R(x)\, \partial_i u(x) + \tfrac{1}{R}(\partial_i \varphi)\left(\tfrac{x}{R}\right)\, u(x) \\ \Rightarrow \quad & \|\partial_i u - \partial_i u_R\|_{L^p} \leq \|(1-\varphi_R)\, \partial_i u\|_{L^p} + \tfrac{c}{R}\, \|u\|_{L^p} \to 0 \text{ mit } R \to \infty \end{aligned}$$

Jetzt verwende Glättung.

(2) Setze $U_k = \Omega_{\frac{1}{k}} \cap B_k(0)$ für $k \in \mathbb{N}$, und $U_0 = \emptyset$. Betrachte dann $V_k = U_{k+1} \setminus \overline{U}_{k-1}$, für $k \in \mathbb{N}$, und wähle eine untergeordnete Teilung der Eins:

$$H_k \in C_c^\infty(V_k), \quad \varphi_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^\infty \varphi_k \equiv 1 \text{ auf } \Omega.$$

Zu $\delta > 0$ gibt es $\varrho_k > 0$, so dass für $u_k = \eta_{\varrho_k} * (\varphi_k \overline{u})$ gilt:

$$\|u_k - \varphi_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2^{-k}\delta, \quad \text{spt } u_k \subset V_k.$$

Für $v = \sum_{k=1}^\infty u_k \in C^\infty(\Omega)$ folgt

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \sum_{k=1}^\infty \|u_k - \eta_k u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \delta.$$

□

Bemerkungen:

(1) Sei $H^{1,p}(\Omega)$ die Vervollständigung des Raums $X = \{u \in C^\infty(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}} < \infty\}$ bzgl. der $W^{1,p}$-Norm. Jedes Element $u \in H^{1,p}(\Omega)$ $H^{1,p}(\Omega)$? ist durch eine Cauchyfolge $u_k \in X$ repräsentiert. Wir erhalten eine isometrische Einbettung

$$H^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega), \quad u \mapsto \lim_{k\to\infty} u_k.$$

Der Satz besagt, dass diese Einbettung surjektiv ist. Also sind $H^{1,p}(\Omega)$ und $W^{1,p}(\Omega)$ isometrisch isomorph.

(2) Für Ω beschränkt ist $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$. Denn für $u \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt:

$$0 = \int_\Omega \partial(u x_i) = \int_\Omega \big((\partial_i u) x_i + u\big).$$

Durch Approximation würde diese Gleichung für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gelten. Sie ist aber falsch z. B. für $u \equiv 1$.

(3) Im allgemeinen ist $C^\infty(\overline{\Omega})$ nicht dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.

(4) $W^{1,p} \cap C^\infty(\Omega)$ ist nicht dicht in Ω, denn sonst wäre $\partial_i u \in C^0(\Omega)$ für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, aber das ist falsch. Zum Beispiel ist $|x|$ in $W^{1,\infty}$, vgl. Beispiel **??**.

Definition 1.3 *Wir bezeichnen mit $W_0^{1,p}(\Omega)$ den Abschluss von $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Wir beweisen jetzt noch zwei Rechenregeln.

Satz 1.4 (Sobolev-Kettenregel) *Sei $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit f' beschränkt. Dann gilt*

$$D(f \circ u) = (f' \circ u)Du \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Beweis: Sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_\sigma)$ für $\sigma > 0$, und $0 < \varrho < \sigma$.

$\Rightarrow \quad \partial_i(f \circ u_\varrho) = (f' \circ u_\varrho)\,\partial_i u_\varrho$ auf $\Omega_\sigma \quad \Rightarrow \quad -\int (f \circ u_\varrho)\,\partial_i \eta = \int (f' \circ u_\varrho)(\partial_i u_\varrho)\,\eta.$

Es gilt $u_\varrho \to u, \partial_i u_\varrho \to \partial_i u$ in $L^1(\Omega_\sigma)$. Durch Wahl einer Teilfolge folgt $u_\varrho \to u$ punktweise fü?. Mit $L = \sup|f'|$ folgt

$$\begin{aligned}
\Big|\int (f \circ u_\varrho - f \circ u)\,\partial_i \varphi\Big| &\leq C\,L\,\|\partial_i \varphi\|_{C^0} \textstyle\int_{\Omega_\sigma} |u_\varrho - u| \to 0,\\
\Big|\int (f' \circ u_\varrho)(\partial_i\, u_\varrho)\eta - (f' \circ u)(\partial_i u)\,\eta\Big| &\leq \int |f' \circ u_\varrho|\,|\partial_i u_\varrho - \partial_i u|\,|\eta|\\
&+ \int |f' \circ u_\varrho - f' \circ u||\partial_i u|\,|\eta| \to 0 \text{ mit } \varrho \searrow 0.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\int (f \circ u)\,\partial_i \eta) - \int (f' \circ u)(\partial_i u)\,\eta.$$

□

Satz 1.5 (Transformation) *Sei $u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\phi \in C^1(\widetilde{\Omega}, \Omega)$ diffeomorph. Dann folgt*

$$\begin{aligned}
D(u \circ \phi) &= \big((Du) \circ \phi\big)\,D\phi \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)\\
\partial_j(u \circ \phi) &= \sum_{i=1}^n (\partial_i u) \circ \phi\,\partial_j \phi_i.
\end{aligned}$$

Beweis: Sei $\eta \in C_c^\infty(\widetilde{\Omega})$. Wegen $\phi(\text{spt}\ \eta) \subset\subset \Omega$ gilt für $\varrho > 0$ hinreichend klein

$$-\int_{\widetilde{\Omega}} (u_\varrho \circ \phi)\partial_i \eta = \int_{\widetilde{\Omega}} \big((Du_\varrho) \circ \phi \cdot \partial_j \phi\big)\eta.$$

Sei $\psi = \phi^{-1} : \widetilde{\Omega} \to \Omega$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\Omega}} (u_\varrho \circ \phi - u \circ \phi)\partial_j \eta &= \int_{\phi(\text{spt}\ \eta)} (u_\varrho - u)\,\underbrace{(\partial_j \eta) \circ \psi\,|\det\, D\psi|}_{\leq C} \to 0\\
\int_{\widetilde{\Omega}} \big((Du_\varrho) \circ \phi - (Du) \circ \phi\big) \cdot \partial_j \phi\,\eta &= \int_{\phi(\text{spt}\ \eta)} (Du_\varrho - Du)\,\underbrace{\big((\partial_j \phi) \circ \psi\big)\,|\det\, D\psi|}_{\leq C} \xrightarrow{\varrho \searrow 0} 0.
\end{aligned}$$

Beachte auch, dass Nullmengen in Nullmengen abgebildet werden. □

Wir kommen nun zu Einbettungssätzen für den Raum $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Wir behandeln zwei Fälle:
$p > n$: Einbettung in $L^q(\mathbb{R}^n)$
$p > n$: Einbettung in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.
Als erstes betrachten wir den Integralfall. Ziel ist der Beweis einer Abschätzung

$$(*) \qquad \|u\|_{L^q} \le C\|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } C = C(n,p).$$

Durch Skalierung sieht man, dass in (*) nur ein $q \in [1,\infty)$ möglich ist:

$$\begin{aligned}
& u_\lambda(x) = u(\lambda x), && Du_\lambda(x) = \lambda Du(\lambda x) \\
\Rightarrow\ & \Big(\int |u_\lambda(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} &=\ & \lambda^{-\frac{n}{q}}\Big(\int |u(y)|^q\,dy\Big)^{\frac{1}{q}} \\
& \Big(\int |Du_\lambda(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} &=\ & \lambda^{1-\frac{n}{p}}\Big(\int |Du(y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Also kann (*) höchsten gelten, wenn $-\frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{p}$.
Bezeichnung. Die Zahl $k - n/p$ wird als Regularitätszahl von $W^{k,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, betrachtet. Die Gleichung $-n/q = 1 - n/p$ besagt also, dass die Regularitätszahlen gleich sind.

Satz 1.6 (Einbettungssatz von Sobolev, $p < n$) *Sei $1 \le p < n$ und $q = \frac{np}{n-p} \Leftrightarrow -\frac{n}{q} = 1 - \frac{n}{p}$. Dann gilt*

$$\|u\|_{Lq} \le \frac{(n-1)q}{n}\|Du\|_{L^p}.$$

Beweis: (Gagliardo-Nirenberg) oBdA $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Schritt 1 Es reicht $p = 1$ (und $q = \frac{n}{n-1}$). Denn dann:

$$\begin{aligned}
\Big[\int |u|^q\Big]^{\frac{n-1}{n}} &= \Big[\int \big(|u|^{\frac{(n-1)q}{n}}\big)^{\frac{n}{n-1}}\Big]^{\frac{n-1}{n}} \\
(\text{Fall } p=1) \quad &\le \int \big|D(|u|^{\frac{(n-1)q}{n}})\big| \\
(\text{Satz 1.4}) \quad &= \frac{(n-1)q}{n}\int |u|^{(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q})q}|Du| \\
(\text{Hölder}) \quad &\le \frac{(n-1)q}{n}\Big(\int |u|^q\Big)^{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\Big(\int |Du|^p\Big)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

denn $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$. Durch Kürzen folgt

$$\|u\|_{L^q} \le \frac{(n-1)q}{n}\|Du\|_{L^p}.$$

Schritt 2 Für $p = 1$, $n = 1$ (“$q = \frac{n}{n-1} = \infty$”) gilt

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \Big|\int_{-\infty}^x u'(\xi)\,d\xi\Big| \le \int_{-\infty}^\infty |u'(\xi)|\,d\xi \\
\Rightarrow\ \|u\|_{L^\infty} &\le \|u'\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Schritt 3 Beweis für $p = 1$, $n \ge 1$, durch Indikation über n.
Schreibe $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, $x = (\xi, z)$ und definiere

$$
\begin{aligned}
f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,z)|\,dz \\
g(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |Du(\xi,z)|\,dz.
\end{aligned}
$$

Dann folgt nach Schritt 2

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}}^{n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\,dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |u(\xi,z)| \Big(\underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial z}(\xi,s) \right| ds}_{\leq g(\xi)} \Big)^{\frac{1}{n-1}} dz\,dx \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi)\,g(\xi)^{\frac{1}{n-1}}\,d\xi \\
&\leq \begin{cases} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\xi)^{\frac{n-1}{n-2}}\,d\xi \Big)^{\frac{n-?}{n-1}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\xi)\,d\xi \Big)^{\frac{1}{n-1}} & (n \geq 3) \\ \|f\|_{L^\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} g(\xi)\,d\xi & (n = 2) \end{cases} \\
\text{(Induktion bzw. Schritt 2)} &\leq \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{|Df(\xi)|}_{\leq g(\xi)} \Big) \cdot \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\xi)\,d\xi \Big)^{\frac{1}{n-1}} \\
&\leq \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |Du(x)|\,dx \Big)^{\frac{n}{n-1}},
\end{aligned}
$$

und die Behauptung folgt. Beachte für $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} f \partial_i \eta &= \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(\xi,z)| \partial_i \eta(\xi)\,d\xi\,dz \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(\xi,z)}{|u(\xi,z)|} \partial_i u(\xi,z)\,\eta(\xi)\,dz\,d\xi \\
\Rightarrow \partial_i f(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{u(\xi,z)}{|u(\xi,z)|}\,\partial_i u(\xi,z)\,dz.
\end{aligned}
$$

Das gilt auch für jeden Einheitsvektor, also

$$
|Df(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |Du(\xi,z)|\,dz = g(\xi).
$$

□

Bemerkung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ glatt berandet. Betrachte

$$
u(x) = \big(1 - \frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{dist}\,(x,\Omega)\big)_+.
$$

Dann gilt

$$|Du(x)| = \frac{1}{\varepsilon}\chi_{\{0<\mathrm{dist}\,(x,\Omega)<\varepsilon\}}.$$

Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{n-1}{n}} & \leq & \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\dfrac{n}{n-1}\Big)^{\frac{n-1}{n}} \\
& \leq & \|Du\|_{L^1} \\
& \leq & \dfrac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}^n\{x : 0 < \mathrm{dist}\,(x,\Omega) < \varepsilon\} \\
& \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} & \mathcal{N}^{n-1}(\partial\Omega).
\end{array}$$

Dies ist die isoperimetrische Ungleichung, mit Konstante Eins (dies ist nicht die optimale Konstante). Man kann umgekehrt zeigen, dass aus der isoperimetrischen Ungleichung die Sobolev-Ungleichung folgt, mit der entsprechenden Konstante.

Als nächstes betrachten wir den Fall $p > n$. Wir streben folgende Abschätzung an:

$$(**) \qquad [u]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq C\|Du\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad \text{mit } C = C(n,p).$$

Betrachte wieder $u_\lambda|x| = u(\lambda x)$ für $\lambda \in (0,\infty)$:

$$\begin{array}{rcl}
[u_\lambda]_{\alpha,\mathbb{R}^n} & = & \lambda^\alpha [u]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \\
\|Du_\lambda\|_{L^p} & = & \lambda^{1-\frac{n}{p}}\|Du\|_{L^p}.
\end{array}$$

Also kann (**) höchstens gelten, wenn $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Wir werden zum Beweis einen kleinen Umweg machen, indem wir allgemein Hilderstetigkeit durch eine Integralbedingung charakterisieren. Betrachte für $u \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ folgende Größen:

- Mittelwert auf $B_r(x)$:
$$u_{x,r} = ⨍_{B_r(x)} u(y)\,dy$$

- Oszillation (oder Schwankung) in L^p auf $B_r(x)$:
$$\omega_p(u,x,r) = \Big(⨍_{B_r(x)} |u(y) - u_{x,r}|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Skalierung: $u_\lambda : B_{\frac{r}{\lambda}}(0) \to \mathbb{R}$, $u_\lambda(z) = u(\lambda z)$.

$$\begin{array}{rcl}
(u_\lambda)_{0,\frac{r}{\lambda}} & = & \dfrac{1}{\alpha_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n}\displaystyle\int_{B_r(0)} u(y)\frac{1}{\lambda^n}\,dy = u_{0,r} \\
\omega_p(u_\lambda, 0, \dfrac{r}{\lambda}) & = & \left(\dfrac{1}{\alpha_n\left(\frac{r}{\lambda}\right)^n}\displaystyle\int_{B_r(0)} |u(y) - u_{0,r}|^p\frac{1}{\lambda^n}\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
& = & \omega_p(u,0,r).
\end{array}$$

Beispiel 1.2 *Sei u eine α-Hölderstetige Funktion für ein $\alpha \in (0,1]$. Dann folgt*

$$\begin{aligned}
\omega_p(u,x,r) &\le \omega_\infty(u,x,r) \\
&= \sup\{|u(y) - u_{x,r}| : y \in B_r(x)\} \\
&\le \sup\{\fint_{B_r(x)} |u(y) - u(z)|\, dz : y \in B_r(x)\} \\
&\le 2^\alpha [u]_{\alpha, B_r(x)} r^\alpha.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\boxed{r^{-\alpha}\omega_p(u,x,r) \le 2\, [u]_{\alpha,\mathbb{R}^n}}$$

Satz 1.7 (Campanato) *Sei $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p \le \infty$ und für ein $\alpha \in (0,1]$*

$$\{u\}_{p,\alpha} = \sup\{r^{-\alpha}\omega_p(u,x,r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\} < \infty.$$

Dann ist u nach Abänderung in einer Nullmenge stetig und es gilt

$$[u]_\alpha \le C\,\{u\}_{p,\alpha} \quad \text{mit } C = \frac{C(n)}{\alpha}.$$

Beweis: Wir müssen zunächst den stetigen Repräsentanten von u finden. Sei $0 < \varrho \le r$. Es gilt

$$\begin{aligned}
|\fint_{B_\varrho(x)} u - \fint_{B_r(x)} u|^p &= |\fint_{B_\varrho(x)} (u(y) - u_{x,r})\, dy|^p \\
&\le \fint_{B_\varrho(x)} |u(y) - u_{x,r}|^p\, dy \\
&\le \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \fint_{B_r(x)} |u(y) - u_{x,r})|^p\, dy \\
&\le \left(\frac{r}{\varrho}\right)^n \{u\}_{p,\alpha}^p\, r^{p\alpha}
\end{aligned}$$

Wähle $r_k = 2^{-k} r$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$.

$$\begin{aligned}
|u_{x,r_k} - u_{x,r}| &\le \sum_{i=0}^{k-1} |u_{x,r_{i+1}} - u_{x,r_i}| \\
&\le 2^{\frac{n}{p}}\, \{u\}_{p,\alpha} \sum_{i=0}^{k-1} (2^{-i} r)^\alpha \\
&\le 2^n\, \{u\}_{p,\alpha}\, r^\alpha \frac{1}{1 - 2^{-\alpha}}.
\end{aligned}$$

Zu $\varrho \in (0, r]$ wähle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $2^{-k-1} r < \varrho \le 2^{-k} r$.

$$\begin{aligned}
|u_{x,\varrho} - u_{x,r}| &\le |u_{x,\varrho} - u_{x,r_k}| + |u_{x,r_k} - u_{x,r}| \\
&\le 2^n \{u\}_{p,\alpha} r^\alpha \Big(\underbrace{2^{-k\alpha}}_{\le 1} + \frac{1}{1 - 2^{-\alpha}} \Big)
\end{aligned}$$

$$|u_{x,\varrho} - u_{x,r}| \le \underbrace{\frac{2^{n+1}}{1 - 2^{-\alpha}}}_{=:c_1} \{u\}_{p,\alpha}\, r^\alpha. \tag{1.3}$$

Für $r > 0$ ist die Funktion $u_r(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy$ stetig, denn es gilt

$$\begin{aligned}|u_r(x) - u_r(x_0)| &= \Big|\fint_{B_1(0)} (u(x+ry) - u(x_0+ry)\Big|\,dy \\ &\to 0 \text{ mit } x \to x_0 \text{ nach (??)}.\end{aligned}$$

Nach 1.3 konvergiert u_r gleichmäßig gegen einen stetigen Repräsentanten von u (beachte $u_r \to u$ punktweise fast überall). Weiter folgt mit $\varrho \searrow 0$:

$$|u(x) - u_{x,r}| \le C_1 \{u\}_{p,\alpha} r^\alpha.$$

Seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x - y| = r$. Dann folgt

$$\begin{aligned}|u(x) - u(y)| &\le |u(x) - u_{x,r}| + |u_{x,r} - u_{y,2r}| + |u_{y,2r} - u(y)| \\ &\le 3\,c_1 \{u\}_{p,\alpha} r^\alpha + \Big|\fint_{B_r(x)} \big(u(z) - u_{y,2r}\big)\,dz\Big| \\ &\le 3\,c_1 \{u\}_{p,\alpha} r^\alpha + 2^n \fint_{B_{2r(y)}} |u(z) - u_{y,2r}|\,dz \\ &\le 3\,c_1 \{u\}_{p,\alpha} r^\alpha + 2^{n+1}\,\{u\}_{p,\alpha}(2r)^\alpha \\ &\le (3\,c_1 + 2^{n+1})\,\{u\}_{p,\alpha} r^\alpha.\end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung mit

$$C = \frac{C(n)}{1 - 2^{-\alpha}} \le \frac{c(n)}{2^\alpha - 1} \le \frac{c(n)}{\alpha} \quad (2^\alpha = e^{\alpha \log 2} \ge 1 + \alpha \log 2).$$

□

Lemma 1.4 (Poincaréungleichung von Morrey) *Für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, gilt*

$$\left(\fint_{B_r(x)} |u - u_{x,r}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C(r)\,r \left(\fint_{B_r(x)} |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Beide Seiten sind skalierungsinvariant, daher sei oBdA $x = 0$, $r = 1$, sowie $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\fint_B |u - u_{0,1}|^p &= \fint_B \Big|\fint_B (u(y) - u(z))\,dz\Big|^p\,dy \\ &\le \fint_B \fint_B |u(y) - u(z)|^p\,dz\,dy \\ &\le 2^p \fint_B \fint_B \int_0^1 |Du(sy + (1-s)z)|^p ds\,dz\,dy\end{aligned}$$

Substitution:
von y: $sy + (1-s)z = \eta \in B_s((1-s)z)$, $dy = s^{-n}\,dy$ für $s \ge \frac{1}{2}$
von z: $sy + (1-s)z = \zeta \in B_{1-s}(sy)$, $dz = (1-s)^{-n}\,d\zeta$ für $s \le \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \fint_B |u - u_{0,1}|^p &\le \frac{2^{n+p}}{\alpha_n} \fint_B \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{B_s((1-s)z)} |Du(\eta)|^p\,d\eta\,ds\,dz \\ &+ \frac{2^{n+p}}{\alpha_n} \fint_B \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{B_{(1-s)}(sy)} |Du(\zeta)|^p\,d\zeta\,ds\,dy \\ &\le 2^{n+p} \fint_B |Du|^p.\end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.8 (Einbettungssatz von Sobolev, $p > n$) *Für $p \in (n, \infty]$ besitzt jedes $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ einen stetigen Repräsentanten, und mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0, 1]$ gilt*

$$[u]_\alpha = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq c \, \|Du\|_{L^p},$$

mit $c = \frac{c(n)}{1 - \frac{n}{p}}$.

Beweis: Es gilt nach Lemma 1.4

$$\begin{aligned} r^\alpha \omega_p(u, x, r) &\leq C(n) r^{\frac{n}{p}} \Big(\fint_{B_r(x)} |Du|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(n) \|Du\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Aus Satz 1.7 folgt

$$[u]_\alpha \leq \frac{c(n)}{\alpha} \{u\}_{p,\alpha} \leq \frac{c(n)}{\alpha} \|Du\|_{L^p}.$$

$\square$

Bemerkung. Der Fall $p = n$ ist schwieriger, es gilt **nicht** $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ein Gegenbeispiel ist $u(x) = \log(\log \frac{1}{|x|})$ für $|x| < 1$.

Frage. Sei $\|u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C$. Existiert eine Teilfolge, die bzgl. einer L^q-Norm (im Fall $p < n$) bzw. einer $C^{0,\alpha}$-Norm (im Fall $p > n$) konvergiert? Für $p > n$ folgt das im wesentlichen direkt aus dem Einbettungssatz von Sobolev und dem Satz **??** aus §2, der Kompaktheit von $C^{0,\alpha}$-beschränkten Mengen in $C^{0,\beta}$ für $\beta < \alpha$.

Lemma 1.5 (L^∞-Abschätzung in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p > n$) *Für $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0, 1]$ gilt*

$$\|u\|_{L_\infty} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}} \quad \textit{mit } C = \frac{C(n)}{\alpha}.$$

Beweis: Es reicht, die Schranke im Nullpunkt zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} |u_{0,R}| &= |\fint_{B_R(0)} u(x) \, dx| \\ &\leq \Big(\fint_{B_R(0)} |u(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C(n) \, R^{-\frac{n}{p}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit Satz 1.8 (Sobolev)

$$\begin{aligned} |u(0) - u_{0,R}| &= |\fint_{B_R(0)} \big(u(0) - u(x)\big) \, dx| \\ &\leq \frac{C(n)}{\alpha} R^\alpha \|Du\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$|u(0)| \le C(n)\|u\|_{W^{1,p}}\big(R^{\alpha-1} + \frac{R^\alpha}{\alpha}\big).$$

Wähle nun $R = 1$. □

Satz 1.9 *Seien $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ für ein $p \in (n,\infty]$ mit $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le M < \infty$ für alle k. Dann existiert ein $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, mit $u_k \to u$ in $C^{0,\beta}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für alle $\beta > \alpha$*

Beweis: Nach Satz 1.8 und nach Lemma 1.5 gilt mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p} \in (0,1]$

$$\|u_k\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} + [u_k]_\alpha \le C(M).$$

Die Behauptung folgt nun aus §2, Satz **??** (kompakte Inklusion $C^{0,\alpha} \subset C^{0,\beta}$ für $\alpha > \beta$).

□

Bemerkung. Der Zusatz „loc“ist notwendig, wie eine translatierende Folge $u_k(x) = u(x - ke_i)$ sofort zeigt.

Bemerkung. Es gilt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, nach Folgerung **??** ($p < \infty$) bzw. Folgerung **??** ($p = \infty$).
Wir kommen jetzt zurück zum Fall $p < n$. Für welche $q \in \big[1, \frac{np}{n-p}\big]$ haben beschränkte Folgen in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ konvergente Teilfolgen in $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$?

Beispiel 1.3 *Sei $u \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. Betrachte*

$$u^\lambda(x) = \lambda^{\frac{n}{p}}\, u(\lambda x) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Es folgt für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|u^\lambda\|_{L^q} &= \lambda^{\frac{n}{r}-1-\frac{n}{q}}\, \|u\|_{L^q}, \\ \|Du^\lambda\|_{L^p} &= \|Du\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Es gilt $\|u^\lambda\|_{L^p} = \frac{1}{\lambda}\|u\|_{L^p} \to 0$ für $\lambda \to \infty$, also ist die Folge für $\lambda \to \infty$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Weiter gilt

$$\operatorname{spt} u \subset B_R(0) \Rightarrow \operatorname{spt} u^\lambda \subset B_{\frac{R}{\lambda}}(0).$$

Falls also $u_k \to u$ in $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, für eine Teilfolge, so muss $u = 0$ und $\|u_k\|_{L^q} \to 0$ gelten. Das ist nur möglich für $-\frac{n}{q} < 1 - \frac{n}{p}$ bzw. $q < \frac{np}{n-p}$.

Satz 1.10 (Einbettungssatz von Rellich) *Seien $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le \infty$ und $\|u_k\|_{W^{1,p}} \le M < \infty$ für alle k. Dann gibt es ein $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, $p^* = \frac{np}{n-p}$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gilt:*

$$u_k \to u \text{ in } L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \text{ für } 1 \le q < p^*.$$

Bemerkung. Im Fall $1 < p < n$ gilt $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und $\|Du\|_{L^p} \le \liminf_{k\to\infty} \|Du\|_{L^p}$. Denn wegen Folgerung **??** gilt (nach Wahl einer weiteren Teilfolge)

$$\partial_i u_k \to g_i \text{ schwach } in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Es folgt leicht $g_i = \partial_i u$ und $\partial_i u_k \to \partial_i u$ schwach in $L^p(\mathbb{R}^n)$ für die ganze Folge. Die Abschätzung folgt aus der Unterhalbstetigkeit der L^p-Norm bei schwacher Konvergenz (Satz **??**).

Lemma 1.6 *Sei $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \le p < \infty$.*

$$\begin{array}{llcll} \text{(i)} & \|u \circ \tau_h - u\|_{L^p} & \le & |h| \|D\, u\|_{L^p} & \textit{für } h \in \mathbb{R}^n, \\ \text{(ii)} & \|u - u_\varrho\|_{L^p} & \le & \varrho \, \|Du\|_{L^p} & \textit{für } \varrho > 0. \end{array}$$

Beweis: Sei oBdA $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned} \int |u(x+h) - u(x)|^p \, dx &= \int | \int_0^1 \frac{d}{ds} u(x+sh)\, ds|^p \, dx \\ &\le \int \int_0^1 |Du(x+sh)|^p \, |h|^p \, ds \, dx \\ &\le |h|^p \|Du\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Hieraus folgt (ii):

$$\begin{aligned} \int |u(x) - u_\varrho(x)|^p \, dx &= \int | \int \eta_\varrho(x-y) \big(u(x) - u(y)\big)\, dy|^p \, dx \\ (y = x - \varrho z) \quad &= \int | \int \eta(z) \big(u(x) - u(x - \varrho z)\big)\, dz|^p \, dx \\ &\le \int \eta(z) \int |u(x) - u(x-\varrho z)|^p \, dx \, dz \le \varrho^p \|Du\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 1.10. Wir zeigen die Aussage erst im Fall $q = p$. Es gilt

$$\begin{aligned} D^\alpha (u_k)_\varrho(x) &= \varrho^{-|\alpha|} \int (D^\alpha \eta)_\varrho (x-y)\, u_k(y)\, dy \\ \Rightarrow |D^\alpha (u_k)_\varrho(x)| &\le C(\alpha) \varrho^{-n-|\alpha|} \, \|u_k\|_{L^1\left(B_\varrho(x)\right)} \\ &\le C(n,\alpha) \varrho^{-|\alpha| - \frac{n}{p}} \, \|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Nach Arzelà-Ascoli gibt es zu festem $\varrho > 0$ eine Teilfolge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$, so dass $(u_{k_j})_\varrho$ lokal in $C^1(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Wähle eine Folge $\varrho^i \searrow 0$ und dazu sukzessive Teilfolgen

$$(k_j^1)_{j\in\mathbb{N}} \supset (k_j^2)_{j\in\mathbb{N}} \supset \ldots,$$

so dass gilt

$$(u_{k_j^i})_{\varrho^i} \longrightarrow u^{\varrho^i} \quad \text{lokal in } C^1(\mathbb{R}^n) \text{ mit } j \to \infty.$$

Bilde die Diagonalfolge und renummeriere:

$$u_{k_j^i} =: u_j \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

Es folgt für alle $\varrho \in \{\varrho_1, \varrho_2, \ldots\}$

$$(u_j)_\varrho \longrightarrow u^\varrho \quad \text{lokal in } C^1(\mathbb{R}^n).$$

Für $\sigma, \varrho \in \{\varrho^1, \varrho^2, \ldots\}$ mit $0 < \sigma \le \varrho$ schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \|u^\varrho - u^\sigma\|_{L^p} &\le \liminf_{j\to\infty} \|(u_j)_\varrho - (u_j)_\sigma\|_{L^p} \\ &\le \liminf_{j\to\infty} \big(\|(u_j)_\varrho - u_j\|_{L^p} + \|u_j - (u_j)_\sigma\|_{L^p}\big) \\ (\text{Lemma 1.6}) \quad &\le \liminf_{j\to\infty} 2\varrho(\|Du_j\|_{L^p}) \\ &\le 2\varrho M \to 0 \text{ mit } \varrho \searrow 0. \end{aligned}$$

Nach Fischer-Riesz gibt es ein $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $u^\varrho \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, und mit $\sigma \searrow 0$ folgt

$$\|u^\varrho - u\|_{L^p} \leq 2\,\varrho\, M.$$

Für $K \subset \mathbb{R}^n$ folgt nun, wieder mit Lemma 1.6, für $\varrho \in \{\varrho^1, \varrho^2, \dots\}$

$$\begin{aligned} \|u - u_j\|_{L^p(K)} &\leq \|u - u^\varrho\|_{L^p(K)} + \|u^\varrho - (u_j)^\varrho\|_{L^p(K)} + \|(u_j)^\varrho - u_j\|_{L^p(K)} \\ &\leq 2\,\varrho\, M + \underbrace{\|u^\varrho - (u_j)_\varrho\|_{L^p(K)}}_{\to 0 \text{ mit } j\to\infty} + \varrho\, M < 4\,\varrho\, M \end{aligned}$$

für $j \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Mit $\varrho_i \searrow 0$ folgt also $u_j \to u$ in $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Aus nachfolgendem Interplationslemma ergibt sich dann $u_j \to u$ in $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ für alle $q \in [1, p^*)$. $\square$

Lemma 1.7 *Sei μ Maß auf X, und $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Dann gilt für $f \in L^p \cap L^q(\mu)$*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{1-\alpha}\, \|f\|_{L^q}^{\alpha} \quad \textit{für } \alpha = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \in (0,1).$$

Beweis: Es gilt nach Wahl von α

$$\frac{(1-\alpha)r}{p} + \frac{\alpha r}{q} = \frac{q-r}{q-p} + \frac{r-p}{q-p} = 1.$$

Also folgt mit Hölder

$$\begin{aligned} \int |f|^r &= \int |f|^{(1-\alpha)r} |f|^{\alpha r} \\ &\leq \left(\int |f|^p\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{p}} \left(\int |f|^q\right)^{\frac{\alpha r}{q}} \\ &= \|f\|_{L^p}^{(1-\alpha)r} \|f\|_{L^q}^{\alpha r} \end{aligned}$$

$\square$

In der Situation des Satzes von Rellich haben wir für $p < q < p^* = \frac{np}{n-p}$ und $\alpha = n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \in (0,1)$

$$\|u - u_j\|_{L^q(K)} \leq \underbrace{\|u - u_j\|_{L^p(K)}^{1-\alpha}}_{\to 0} \underbrace{\|u - u_j\|_{L^{p^*}(K)}^{\alpha}}_{\leq C} \to 0.$$

Wir wollen die Einbettungssätze auf beschränkten, offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zur Verfügung haben. Dazu zeigen wir folgenden Fortsetzungssatz.

Satz 1.11 ($W^{1,p}$-Fortsetzungssatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\overline{\Omega} \subset U$. Dann gibt es einen stetigen, linearen Operator*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}_0(U) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

mit $Eu|_\Omega = u$ für alle u.

Beweis: Wir vereinbaren folgende Notation:

$$\begin{aligned} Q &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\} \\ Q^- &= \{x \in C : x_n < 0\}, \quad I = \{x \in C : x_n = 0\} \\ x &= (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Der Kern des Arguments ist folgende lokale Konstruktion:

Schritt 1 Für $u \in C^1(Q \cup I)$ mit spt $u \subset\subset Q$ definiere $\widetilde{u} : Q \to \mathbb{R}$ durch gerade Spiegelung, i. e.

$$\widetilde{u}(x', x_n) = \begin{cases} (x', x_n) & \text{für } x_n \leq 0 \\ (x', -x_n) & \text{für } x_n > 0. \end{cases}$$

Dann ist $\widetilde{u} \in W^{1,p}(Q)$ und es gilt

$$\|\widetilde{u}\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(Q^-)}.$$

Beweis:

Wir berechnen mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_Q \widetilde{u}\, \partial_i \varphi &= \int_{Q^-} \partial_i(\widetilde{u}\varphi) - \int_{Q^-} (\partial_i \widetilde{u})\varphi \\ &\quad + \int_{Q^+} \partial_i(\widetilde{u}\varphi) - \int_{Q^+} (\partial_i \widetilde{u})\varphi \\ &= -\int_Q (\partial_i \widetilde{u})\varphi. \end{aligned}$$

Schritt 2 Die Aussage von Schritt 1 gilt auch für $u \in W^{1,p}(Q^-)$ mit spt $u \subset\subset Q$.

Beweis: Nach Satz 1.3 (Meyers-Serrin) können wir zusätzlich $u \in C^\infty(Q^-)$ annehmen. Definiere $u^s : Q^- \to \mathbb{R}$, $u^s(x', x_n) = u(x', x_n - s)$.

Für $s \in (0,1)$ gilt $u^s \in C^\infty(\overline{Q^-})$.
Außerdem gilt nach (**??**) $u^s \to u$ in $W^{1,p}(Q^-)$. Hieraus folgt ebenfalls $\widetilde{u}^s \to \widetilde{u}$ in $W^{1,p}(Q^+)$.
Aus $\widetilde{u}^s \in W^{1,p}(Q)$ folgt leicht $\widetilde{u} \in W^{1,p}(Q)$, sowie die gewünschte Abschätzung.

Schritt 3 *Konstruktion der globalen Fortsetzung*
Überdecke $\partial\Omega$ durch offene Mengen $U_1, \ldots, U_N$, so dass bi-Lipschitzabbildungen $\phi_i : U_i \to \mathbb{Q}$ existieren mit

$$\phi_i(\Omega \cap U_i) = Q^-.$$

Mit $u_0 = \Omega$ ist $\{U_j : i = 0, 1, \ldots, N\}$ offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$, und wir können eine untergeordnete Teilung der Eins $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ wählen mit

$$\sum_{i=0}^{N} \eta_i = 1 \quad \text{auf } \overline{\Omega}.$$

Außerdem können wir annehmen, dass $\eta_i \in C_c^\infty(U)$, andernfalls multiplizieren wir η_i noch mit einer Abschneidefunktion. Für $u \in W^{1,p}(\Omega)$ können wir jetzt definieren:

$$E(u) = \eta_0 u + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{v}_i \circ \phi_i \quad \text{mit } v_i = (\eta_i u) \circ \phi_i^{-1}|_{Q^-}.$$

Dabei sei $\widetilde{v}_i \circ \phi_i$ durch Null auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Es folgt auf Ω

$$\widetilde{v}_i \circ \phi_i = \begin{cases} \eta_i u & \text{auf } \Omega \cap U_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit

$$E(u) = \eta_0 u + \sum_{i=1}^{N} \eta_i u = u \quad \text{auf } \Omega.$$

Die Abschätzung folgt nun aus Schritt 2 und Satz 1.5. □

Bemerkung. In Satz 1.5 wurde die Aussage nur für Transformationen der Klasse C^1 gezeigt.

Folgerung 1.2 *Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitzrand ist $C^1(\overline{\Omega})$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Satz 1.12 (Einbettungssatz auf Ω) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand.*

a) Es gibt stetige Einbettungen

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) \text{ für } p^* = \frac{np}{n-p}, & \text{falls } p < n \\ C^{0,\alpha}(\Omega) \text{ für } \alpha = 1 - \frac{n}{p}, & \text{falls } p > n. \end{cases}$$

b) Ist $\|u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \mathrm{const}$, so gilt für eine Teilfolge

$$u_k \to u \text{ in } \begin{cases} L^q(\Omega) \text{ für alle } q < p^*, & \text{falls } p < n \\ C^{0,\beta}(\Omega) \text{ für alle } \beta < 1 - \frac{n}{p}, & \text{falls } p > n. \end{cases}$$

2 Hilbertraumtheorie

Definition 2.1 *Ein Skalarproduktraum $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über $\mathbb{R}^n$ heißt Hilbertraum, wenn er mit der Norm $\|x\| = \sqrt[+]{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist.*

Beispiele:

- $L^2(\mu)$ mit $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int fg \, d\mu$
- $W^{1,2}(\Omega)$ mit $\langle f, g \rangle_{W^{1,2}} = \int_\Omega (fg + \langle Df, Dg \rangle)$

Satz 2.1 (Darstellungssatz von Riesz) *Sei X Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung*

$$\Lambda : X \to X', \quad \Lambda x(y) = \langle x, y \rangle$$

eine surjektive, lineare Isometrie.

Zusatz. Für $\varphi \in X'$ ist $x_0 = \Lambda^{-1}(\varphi)$ die eindeutig bestimmte Minimalstelle des Funktionals

$$Q_\varphi : X \to \mathbb{R}, \quad Q_\varphi(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \varphi(x).$$

Beweis: Für $\|y\| \leq 1$ gilt nach Cauchy-Schwarz

$$|\Lambda x(y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \quad \text{und } \Lambda x\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \|x\|.$$

Also ist $\Lambda x \in X'$ und $\|\Lambda x\| = \|x\|$. Für die Surjektivität konstruieren wir die Minimalstelle von Q_φ, zu gegebenem $\varphi \in X'$. Für alle $x \in X$ gilt

$$\begin{aligned} Q_\varphi(x) &\geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - \|\varphi\| \, \|x\| = \frac{1}{2}(\|x\| - \|\varphi\|)^2 - \frac{1}{2}\|\varphi\|^2 \\ \Rightarrow \lambda &:= \inf_{x \in X} Q_\varphi(x) \geq -\frac{1}{2}\|\varphi\|^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Sei x_k Minimalfolge für Q_φ. Dann folgt

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\|x_k - x_l\|^2 &= \|x_k\|^2 + \|x_l\|^2 - \tfrac{1}{2}\|x_k + x_l\|^2 \\ &= \underbrace{2Q_\varphi(x_k)}_{\to 2\lambda} + \underbrace{2Q_\varphi(x_l)}_{\to 2\lambda} - \underbrace{4Q_\varphi\left(\frac{x_k + x_l}{2}\right)}_{\geq 4\lambda} \stackrel{k,l \to \infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X, und $x_0 := \lim_{k\to\infty} x_k \in X$ existiert. Es folgt

$$Q_\varphi(x_0) = \lim_{k\to\infty} Q_\varphi(x_k) = \lambda.$$

Daraus folgt für alle $y \in X$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} Q_\varphi(x_0 + \varepsilon y)|_{\varepsilon=0} = \langle y, x_0\rangle - \varphi(y).$$

Damit gilt $\Lambda(x_0) = \varphi$. $\square$

Folgerung 2.1 *Hilberträume sind reflexiv.*

Beweis: Nach Satz 2.1 ist die Norm auf X' euklidische Norm bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle \varphi, \psi\rangle_{X'} = \langle \Lambda_X^{-1}\varphi, \Lambda_X^{-1}\psi\rangle_X,$$

das heißt X' ist ebenfalls Hilbertraum. Die Behauptung folgt aus der Kommutativität des dolgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "J_x"] \arrow[dr, "\Lambda_X"'] & & X'' \\ & X' \arrow[ur, "\Lambda_{X'}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{rcl} (\Lambda_X, \Lambda_X x)(\varphi) & = & \langle \Lambda_X x, \varphi\rangle_{X'} \\ & = & \langle \Lambda_X^{-1}\Lambda_X x, \Lambda_X^{-1}\varphi\rangle_X \\ & = & \langle x, \Lambda_X^{-1}\varphi\rangle_X \\ & = & \Lambda_X\Lambda_X^{-1}\varphi(x) \\ & = & \varphi(x) \\ & = & Jx(\varphi). \end{array}$$

$\square$

Definition 2.2 *Das orthogonale Komplement einer Menge $M \subset X$ ist*

$$M^\perp = \{x \in X : \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in M\}.$$

$M^\perp$ ist abgeschlossener Unterraum von X.

Folgerung 2.2 (Projektionssatz) *Ist Y abgeschlossener Unterraum von X, so gilt $X = Y \oplus Y^\perp$.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist Y mit dem induzierten Skalarprodukt Hilbertraum. Für $x \in X$ betrachte $\varphi \in Y'$, $\varphi(y) = \langle x, y\rangle$, Nach Satz 2.1 gibt es $y_0 \in Y$ mit

$$\begin{array}{rcll} \varphi(y) & = & \langle y_0, y\rangle & \text{für alle } y \in Y \\ \Leftrightarrow \langle x - y_0, y\rangle & = & 0 & \text{für alle } y \in Y \end{array}$$

Also ist $x = y_0 + (x - y_0) \in Y \oplus Y^\perp$. $\square$

Das zugehörige Funktional nach Satz 2.1 ist

$$Q(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\|y - x\|^2 - \|x\|^2$$

Folgerung 2.3 (Hilbertraum-Adjungierte) *Seien X, Y Hilberträume über $\mathbb{R}$. Zu $T \in L(X,Y)$ gibt es genau ein $T^* \in L(X,Y)$ mit*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

BEWEIS: Eindeutigkeit ist klar. Betrachte die transponierte Abbildung (Banachraum-Adjungierte)

$$T' \in L(Y', X'), T'\psi = \psi \circ T.$$

Setze nun $T^* = \Lambda_X^{-1} T' \Lambda_Y$. Es folgt

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \Lambda_X \downarrow & & \downarrow \Lambda_Y \\ X' & \xleftarrow{T'} & Y' \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\langle x, T^*y\rangle &= \langle x, \Lambda_X^{-1} T' \Lambda_Y y\rangle \\
&= T' \Lambda_Y y(x) \\
&= \Lambda_Y y(Tx) \\
&= \langle Tx, y\rangle
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.1 (Darstellung von Bilinearformen) *Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform auf X, d. h.*

$$\|B\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |B(x,y)| < \infty.$$

Dann gibt es genau ein $T = T_B \in L(X,X)$ mit

$$B(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad \textit{für alle } x, y \in X.$$

Es gilt $\|T\| = \|B\|$.

BEWEIS: Betrachte für $x \in X$ fest

$$\varphi_x \in X', \quad \varphi_x(y) = B(x,y).$$

Erhalte nach Satz 2.1 eine wohldefinierte Abbildung $T : X \to X$ mit

$$B(x,y) = \langle T(x), y\rangle \qquad \text{für alle } x, y \in K.$$

Es folgt leicht, dass $T : X \to X$ linear ist. Außerdem folgt mit $y = Tx$ für $\|x\| \le 1$

$$\|Tx\|^2 = B(x, Tx) \le \|B\|\,\|Tx\|,$$

also $\|T\| \le \|B\|$. Die Ungleichung $\|B\| \le \|T\|$ ist offensichtlich. $\square$

Lemma 2.2 (Lax-Milgram) *Sei $B : X \times X \to \mathbb{R}$ stetige Bilinearform mit ??*

(2.1) *B ist stetig, d. h. es gibt ein $M < \infty$ mit $|B(x,y)| \le M\,\|x\|\,\|y\|$ für alle $x, y \in X$.*

(2.2) *B ist koerziv, d. h. es gibt ein $\mu > 0$ mit $B(x,x) \ge \mu\|x\|^2$ für alle $x \in X$. Dann gibt es zu jedem $\varphi \in X'$ genau ein $X_\varphi \in X$ mit*

$$B(x_\varphi, y) = \varphi(y) \text{ für alle } y \in Y,$$

und es gilt

(2.3) $\|x_\varphi\| \le \frac{1}{\mu}\|\varphi\|$.

Zusatz. Ist B symmetrisch, so ist x_φ die eindeutig bestimmte Minimusstelle des Funktionals

$$Q_\varphi(y) = \frac{1}{2}B(y,y) - \varphi(y).$$

Beweis:
Eindeutigkeit. Sei $B(x_\varphi, y) = \varphi(y)$ für alle $y \in Y$. Durch Wahl von $y = x_\varphi$ folgt

$$\mu\|x\|_\varphi^2 \le B(x_\varphi, x_\varphi) = \varphi(x_\varphi) \le \|\varphi\|\,\|x_\varphi\|.$$

Also folgt die Abschätzung (2.2). Insbesondere:

$$B(x_1, \cdot) = B(x_2, \cdot) \quad \Rightarrow \quad B(x_1 - x_2, \cdot) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Existenz. Ist B zusätzlich symmetrisch, so ist $B(\cdot,\cdot)$ Skalarprodukt mit äquivalenter Norm:

$$\sqrt{\mu}\|x\| \le \|x\|_B \le \sqrt{M}\|x\|,$$

also $(X, \|\cdot\|_B)$ Hilbertraum. Die Behauptung ist dazu genau die Aussage von Satz 2.1(Riesz). Ist B nicht symmetrisch, so wähle nach Lemma 2.1 $T \in L(X,X)$ mit $B(x,y) = \langle x, Ty\rangle$. Es gilt

$$\mu\|x\|^2 \le B(x,x) = \langle x, Tx\rangle \in \|Tx\|\,\|x\|,$$

also $\|TX\| \ge \mu\|x\|$. Definiere nun

$$\begin{array}{rcl} A(x,y) & = & \langle Tx, Ty\rangle \\ \Rightarrow \|A\| & \le & \|T\|^2 = \|B\|^2 < \infty \text{ (Lemma 2.1)} \\ A(x,x) & = & \|Tx\|^2 \ge \mu^2\|x\|^2 \end{array}$$

Da A symmetrisch, gibt es ein $z_\varphi \in X$ mit

$$\begin{aligned} A(z_\varphi, y) &= \varphi(y) \quad \text{für alle } y \in Y \\ \Rightarrow B(Tz_\varphi, y) &= \varphi(y) \quad \text{für alle } \varphi \in Y \end{aligned}$$

Also ist $X_\varphi = Tz_\varphi$ dei gesuchte Lösung.

□

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Betrachte das elliptische Randwertproblem

$$(*) \qquad L\,u = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\beta (a^{\alpha\beta} \partial_\alpha\, u) = f \text{ in } \Omega$$
$$u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit folgenden Voraussetzungen an die Koeffizienten:

(2.4) *Beschränktheit:* $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ und

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \|a^{\alpha\beta}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$$

(2.5) *Elliptizität:* es gibt ein $\mu > 0$ mit

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \geq \mu(\xi)^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Unter dieser Annahme kann Lu weder klassisch noch als schwache Ableitung definiert werden. Stattdessen müssen wir Lu als Distribution (=stetiges lineares Funktional auf $C_c^\infty(\Omega)$) auffassen.

Lemma 2.3 *Unter Voraussetzung (2.4) gilt:*

(1) Die Bilinearform

$$B(u,r) = \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial\beta v$$

ist stetig auf $W^{1,2}(\Omega)$, genauer $\|B\| \leq M$.

(2) Der schwach definierte Operator

$$L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)', Lu(v) = B(u,v),$$

ist stetig, genauer $\|L\| \leq M$.

(3) $\varphi_f : W^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\quad \varphi_f(u) = \int_\Omega fu$, ist stetig, und zwar gilt $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_{L^2}$.

Bemerkung. Formel ergibt sich die schwache Definition von L, indem an Lu eine Testfunktion $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ heranmultipliziert wird, und dann partiell integriert wird.

Definition 2.3 *Eine schwache Lösung des RWV* $(*)$ ist eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $Lu = \varphi_f$, d. h.

$$B(u,v) = \varphi_f(v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Für die Koerzivität von B brauchen wir folgendes

Satz 2.2 (Poincaré-Ungleichung) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *beschränktes Gebiet. Für* $1 \leq p < \infty$ *gilt*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d \, \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

mit $d = \operatorname{diam}(\Omega)$.

Beweis: oBdA $u \in C_c^\infty(\Omega)$
oBdA $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < d\}$
Setze $u(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Sei $x = (\xi, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $0 \leq x_n \leq d$.

$$\begin{aligned} |u(\xi,x_n)|^p &= \left| \int_0^{x_n} \partial_n u(\xi,x_n)\, ds \right|^p \leq d^{p-1} \int_0^d |\partial_n u(\xi,s)^p \, ds \\ \Rightarrow \int_\Omega |u(x)|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}}^0 \int_0^d |u(\xi,x_n)|^p \, dx_n \, d\xi \\ &\leq d^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^d \int_0^d |\partial_n u(\xi,s)|^p \, ds \, dx_n \, d\xi \\ &= d^p \int_\Omega |\partial_n u|^p \, dx. \end{aligned}$$

□

Satz 2.3 (schwache Lösung des Dirichletproblems) *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $\operatorname{diam} \Omega = d < \infty$ *und* $\alpha \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ *elliptisch mit Konstante* $\mu > 0$*. Dann ist der Operator* $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$, $Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u)$*, invertierbar und es gilt:*

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{(d+1)^2}{\mu}. \tag{2.6}$$

Beweis: Nach Lemma 2.3 gilt für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,2}}^2 = \int_\Omega u^2 + \int_\Omega |Du|^2 \leq (d+1)^2 \int_\Omega |Du|^2,$$

also folgt

$$B(u,u) \geq \mu \int_\Omega |Du|^2 \geq \frac{\mu}{(d+1)^2} \|u\|_{W^{1,2}}^2.$$

Die Behauptung folgt damit aus Lemma 2.2.

□

Zusatz. Sei $(a^{\alpha\beta})$ symmetrisch, und $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)'$. Dann ist die Lösung $u \in M_0^{1,2}(\Omega)$ von $Lu = \varphi$ die eindeutig bestimmte Minimumstelle des Funktionals

$$Q_\varphi(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^n a^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \partial_\beta u - \varphi(u).$$

Bemerkung. Es gilt also die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \frac{(d+1)^2}{\mu} \|Lu\|_{W_0^{-1,2}(\Omega)}, \tag{2.7}$$

wobei $W_0^{-1,2}(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.
Als nächste wollen wir die Lösungstheorie auf Operatoren $L = L_0 + K$ ausdehnen, wobei K eine Operator höchstens erster Ordnung ist.

Definition 2.4 *Seien X, Y Banachräume. $K \in L(X,Y)$ heißt kompakt, falls gilt: für jede beschränkte Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset X$ hat die Folge $(Kx_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine konvergente Teilfolge.*

Äquivalent:

- für $B \subset X$ beschränkt ist $\overline{K(B)}$ kompakt.
- $x_i \to x$ schwach in $X \Rightarrow Kx_i \to Kx$ stark in Y.

Beispiel 2.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit Lipschitzrand. Dann ist die Einbettung $E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ kompakt (Satz 1.10, Rellich).*

Lemma 2.4

(1) *Für Verkettungen gilt:*
stetig $\circ$ kompakt = kompakt
kompakt $\circ$ stetig = kompakt

(2) *$K : X \to Y$ kompakt $\quad\Rightarrow\quad$ $K' : Y' \to X'$ kompakt*

Beweis: (von (2))

$M = \overline{K(B_1(0))}$ ist kompakt. Seien $\psi_n \in Y'$ mit $\|\psi_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
$\psi_n|_M$ ist glm. beschränkt, glm. Lipschitz
Arzela-Ascoli $\Rightarrow$ $\psi_n|_M$ ist Cauchyfolge in $C^0(M)$ nach Übergang zu Teilfolge.
$\|\psi_n(Kx) - \psi_m(Kx)\| < \varepsilon$ für $x \in \overline{B_1(0)}$, $n, m > N(\varepsilon)$
$\Rightarrow \|\psi_n \circ K - \psi_m \circ K\| < \varepsilon$ für $n, m > N(\varepsilon)$
$\Rightarrow K'\psi_n = \psi_n \circ K$ ist Cauchyfolge in X'. □

Definition 2.5 *$L \in L(X,Y)$ heißt Fredholmoperator, falls gilt:*

(1) Bild $L \subset Y$ *ist abgeschlossen*

(2) $\ker L$ *und* coker $L = Y/$ Bild L *sind? endlich dim.*

Der Fredholmindex von L ist $\operatorname{ind}(L) = \dim \ker L - \dim \operatorname{coker} L \in \mathbb{Z}$.

$\dim \ker L$	=	*Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der homogenen Gleichung $Lu = 0$*
$\dim \operatorname{coker} L$	=	*Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen, damit die inhomogene Gleichung $Lu = f$ lösbar ist.*

Satz 2.4 (Riesz - Schander) *Seien X, Y Hilberträume, $L_0 \in (X, y)$ habe eine beschränkte Inverse und $K \in L(X, Y)$ sei kompakt. Dann ist $L = L_0 + K$ Fredholmoperator vom Index Null.*

Bemerkung. Insbesondere
$$L \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ injektiv}.$$

Beweis: oBdA $X = Y$ und $L = \mathrm{Id} + K$ (betrachte $L_0^{-1} L$).

Schritt 1 $\dim \ker L$, $\dim \ker L' < \infty$
Sei $x_j \in \{x \in \ker L : \|x\| \leq 1\}$
$\Rightarrow$ $x_j = -Kx_j$ hat konvergente Teilfolge
$\Rightarrow$ $\{x \in \ker L : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt
$\Rightarrow$ $\dim \ker L < \infty$

$$L' = (\mathrm{Id} + K)' = \mathrm{Id} + K'$$

Lemma 2.4 $\Rightarrow$ $\dim \ker L' < \infty$.

Schritt 2 $\exists m > 0 : \|Lx\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in (\ker L)^{\perp}$. Anderfalls finde? $x_j \perp \ker L$, $\|x - j\| = 1$ mit $\|Lx_j\| \leq \frac{1}{j}$. oBdA $Kx_j \to x \in X$ (Übergang zu Teilfolge) $\Rightarrow x_j = Lx_j - Kx_j \to x \in (\ker L)^{\perp}$, $\|x\| = 1$. Aber $Lx = \lim_{j\to\infty} Lx_j = 0$, Widerspruch.

Schritt 3 $\mathrm{Bild}\,(L)$ ist abgeschlossen. Sei $y_i = Lx_j \to y \in X$, oBdA $x_j \in (\ker L)^{\perp}$

$$\|x_j - x_k\| \leq \frac{1}{m} \|L(x_j - x_k)\| = \frac{1}{m} \|y_j - y_k\| \overset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow x_j \to x$, $y = \lim_{j\to\infty} Lx_j = Lx \in \mathrm{Bild}\,(L)$.

Schritt 4 $(\mathrm{coker}\ L)' \cong \ker L'$ $\quad (\Rightarrow \dim \mathrm{coker}\ L < \infty)$. Die Norm auf $\mathrm{coker}\ L = Y/\,\mathrm{Bild}\ L$ ist
$$\|[y]\| = \inf \|y + Lx\| = \|p^{\perp} y\|,$$
wobei $P^{\perp} : Y \overset{x \in X}{\longrightarrow} (\mathrm{Bild}\ L)^{\perp}$ Orthogonalprojektion (siehe Satz **??**).

Betrachte folgende Abbildungen.

$$\begin{array}{rcllcl} F:\ker L' & \to & (\text{coker } L)', & (F\varphi)[y] & = & \varphi(y) \\ G:(\text{coker } L)' & \to & \ker L', & (G\psi)(y) & = & \psi([y]) \end{array}$$

F, G sind wohldefiniert:

$$\varphi \in \ker L' \Rightarrow \varphi(y + Lx) = \varphi(y) + (L'\varphi)(x) = \varphi(y).$$

F, G sind stetig:

$$(F\varphi)[y] = \varphi(y) = \varphi(p^{\perp}y) \leq \|\varphi\| \cdot \|[y]\|$$

$\Rightarrow \quad \|F\varphi\| \leq \|\varphi\|.$

Schritt 5 *Bestimmung des Fredholmindex*
Wir zeigen, dass L eine Umgebung in $L(X,X)$ hat, die aus Fredholmoperatoren mit demselben Index besteht. Dann ist $t \mapsto \operatorname{ind}(\mathrm{Id} + tK)$ konstant, also Null. Setze wieder

$$P : X \to \text{Bild } K \quad \text{Orthogonalprojektion.}$$

Für $S \in L(X,X)$ setze $S_1 = PS : \ker L^{\perp} \to \text{Bild } L$. Es gilt

$$\|S_1 - L_1\| = \|P(S-L)\mid_{(\ker L)^{\perp}}\| \leq \|S - L\|.$$

Da L_1 beschränkt invertierbar nach Schritt 2, ist auch S_1 beschränkt invertierbar für $\|S - L\| < \varepsilon$. Insbesondere folgt für $x \in (\ker L)^{\perp}$

$$\|Sx\| \geq \|PSX\| = \|S_1 x\| \geq \lambda\|x\| \quad (\lambda > 0).$$

Wie in Schritt 2 folgt, dass $S(\ker L^{\perp})$ abgeschlossener Unterraum ist.

a) $(\text{Bild } L)^{\perp} \xrightarrow{[\ ]} X/S(\ker L^{\perp})$ *ist isomorph*:

$$\begin{array}{rl} \textit{injektiv:} & x \in (\text{Bild } L)^{\perp} \cap S(\ker L^{\perp}) \\ \Rightarrow & x = Sy \quad \text{mit } y \in \ker L^{\perp} \\ \Rightarrow & 0 = Px = PSy = S_1 y \\ \Rightarrow & y = 0, \text{ also } x = 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \textit{surjektiv:} & \text{Zu } x \in X \text{ suchen wir } x_0 \in \text{Bild } L^{\perp} \text{ und } y \in \ker L^{\perp} \text{ mit } x = x_0 + Sy. \\ & \text{Dann muss gelten: } Px = PSy = S_1 y \\ \Rightarrow & y = S_1^{-1}Px \text{ und } x_0 = x - SS_1^{-1}Px \\ & \text{Mit diesen Definitionen gilt } y \in \ker L^{\perp} \text{ per Definition und} \end{array}$$

$$Px_0 = Px - PS\,S_1^{-1}Px = 0, \text{ wie verlangt.}$$

Insbesondere: die Inklusionen

$$S(\ker L^{\perp}) \subset \text{Bild } S \subset X$$

haben endliche Kodimension, und Bild S ist abgeschlossener Unterraum.

b) $\ker S \xrightarrow{[\ ]} X/\ker L^{\perp}$ *ist injektiv:*
   $Sx = 0,\ x \in \ker L^{\perp} \Rightarrow= PSx = S_1 x \Rightarrow x = 0.$

c) Betrachte nun die durch S induzierte Abbildung

$$X/\ker L^{\perp} \xrightarrow{\widetilde{S}} X/S(\ker L^{\perp}), \quad \widetilde{S}([x]) = [Sx].$$

Es gilt Bild $\widetilde{S} = S(x)/S(\ker L^{\perp})$, *und weiter:*

$$\begin{aligned} \widetilde{S}([x]) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \exists y \in \ker L^{\perp} \textit{ mit } Sx = Sy \\ &\Rightarrow \quad x_0; = x - y \in \ker S \\ &\Rightarrow \quad [x] = [x_0] \textit{ in } X/\ker L^{\perp},\ \textit{für ein } x_0 \in \ker S. \end{aligned}$$

Also gilt

$$[x] \in \ker \widetilde{S} \Leftrightarrow [x] \textit{ liegt im Bild von b).}$$

Jetzt wenden wir auf die Abbildung $\widetilde{S}$ die Dimensionsformel an:

$$\begin{aligned} \dim \ker L - \dim \ker \widetilde{S} &= \dim X/\ker L^{\perp} - \dim \ker \widetilde{S} \\ &= \dim \text{Bild } \widetilde{S} \\ &= \dim X/S(\ker L^{\perp}) - \dim X/S(X) \\ &= \dim \text{coker } L - \dim \text{coker } S. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Der Satz gilt auch für Banachräume, man muss dann abgeschlossenen Komplemente wählen.

Lemma 2.5 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und es gelte*

$$\sum_{\beta=1}^{n} \|b^{\beta}\|_{L^{\infty}(\Omega)} + \|c^{\beta}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq M < \infty.$$

Dann ist der Operator $K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$Ku = -\sum_{\beta=1}^{n} \partial\beta(b^{\beta}u) + \sum_{\beta=1}^{n} c^{\beta}\partial\beta u + qu$$

kompakt.

Beweis:

$$\begin{aligned} W_0^{1,2}(\Omega) \quad &\xrightarrow{E} \quad L^2(\Omega) \text{ kompakt (Rellich)} \\ \Lambda : L^2(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad L^2(\Omega)', \quad \Lambda u(v) = \int_{\Omega} uv \text{ stetig} \\ E' \circ \Lambda : L^2(\Omega) \quad &\longrightarrow \quad W_0^{1,2}(\Omega)',\ \text{kompakt, wobei} \\ E' \circ \Lambda f(v) \quad &= \quad \Lambda f(Ev) = \int_{\Omega} fv = \varphi_f(v). \end{aligned}$$

Damit folgt die Kompaktheit folgender Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc}
W_0^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) & \longrightarrow & W_0^{1,2}(\Omega)' \\
u & \overset{E}{\longmapsto} & u & \overset{-\partial_\beta b^\beta}{\longmapsto} & -\partial_\beta(b^\beta u) \\
u & \overset{c^\beta \partial_\beta u}{\longmapsto} & c^\beta \partial_\beta u & \overset{E' \circ \Lambda}{\longmapsto} & c^\beta \partial_\beta u \\
u & \overset{E}{\longmapsto} & u & \overset{q}{\longrightarrow} & qu
\end{array}$$

□

Definition 2.6 *Sei $L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$. Der formaladjungierte Operator von L ist durch folgendes Diagramm definiert:*

Vorsicht: Dieses L^* ist *nicht* die Hilbertraumadjungierte der Abbildung $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)'$. Sondern es gilt Folgendes:

$$\begin{aligned}
L^*u(v) &= (L'Ju)(v) = Ju(Lv) = Lv(u) \\
Lv(u) &= \int_\Omega \left(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha v \partial_\beta u + b^\beta v \partial_\beta u + c^\beta(\partial_\beta v)u + qvu\right) \\
&= \int_\Omega \left(a^{\beta\alpha}\partial_\alpha u \partial_\beta v + b^\beta (\partial_\beta u)v + c^\beta u(\partial_\beta v) + quv\right) \\
\Rightarrow L^*u &= -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\beta(a^{\beta\alpha}\partial_\alpha u) - \sum_\beta \partial_\beta(c^\beta u) + \sum_\beta b^\beta \partial_\beta u + qu.
\end{aligned}$$

L^* heißt formaladjungierter Operator zu L, weil mit formaler partieller Integration bzgl. des L^2-Skalarprodukts gilt:

$$\langle Lu, v\rangle_{L^2} = \langle u, L^*v\rangle_{L^2}.$$

Satz 2.5 (Fredholmsche Alternative für DP) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und*

$$L = L_0 + K : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega')$$

wie oben mit L^∞-Koeffizienten und folgenden Eigenschaften:

(E) $\displaystyle\sum_{\alpha,\beta} a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \mu|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$

(B) $\displaystyle\sum_{\beta} \big(\|b^\beta\|_{L^\infty} + \|c^\beta\|_{L^\infty}\big) + \|q\|_{L^\infty} \leq M.$

Dann gelten folgende Aussagen:

(1) *L Fredholmoperator von Index Null, und surjektiv $\Leftrightarrow$ injektiv*

(2) $\varphi \in \text{Bild } L \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in \ker L^*$

(3) $\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C\big(\|Lu\|_{W^{-1,2}(\Omega)} + \|u\|_{W^{-1,2}(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ *mit* $C = C(\Omega, \mu, M)$.

Beweis: (1) ergibt sich mit Satz 2.4 (Riesz-Schander) aus Satz 2.3 (Invertierbarkeit von L_0) und Lemma 2.5 (Kompaktheit von K). Nach Beweis von Satz 2.4, Schritt 4, ist folgende Abbildung surjektiv:

$$F : \ker(L') \longrightarrow (W_0^{1,2}(\Omega)'/\,\text{Bild } L)', F\psi([\varphi]) = \psi(\varphi).$$

?

Damit folgt wegen $\ker(L') = J(\ker L^*)$:

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{Bild } L \quad &\Leftrightarrow \quad \psi(\varphi) = 0 \quad \forall \psi \in \ker L' \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(u) = 0 \quad \forall \psi \in \ker L^*. \end{aligned}$$

Für (3) schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \mu\|Du\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad L_0u(u) \qquad \text{(Elliptizität)} \\ &= \quad Lu(u) - Ku(u) \\ &\leq \quad \|Lu\|_{W_0^{-1,2}} \|u\|_{W_0^{1,2}} + |Ku(u)| \\ |Ku(u)| \quad &= \quad |\int_\Omega (b^\beta u(\partial_\beta u) + c^\beta(\partial_\beta u)u + qu^2)| \\ &\leq \quad CM\Big(\int_\Omega |u||Du| + \int_\Omega |u|^2\Big) \\ &\leq \quad \varepsilon \int_\Omega |Du|^2 + C(M,\varepsilon) \int_\Omega |u|^2. \end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon = \mu/2$ und absolviere:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,2}}^2 \quad &\leq \quad C\,\|Du\|_{L^2}^2 \quad \text{(Poincaré, Satz 2.2)} \\ &\leq \quad \|Lu\|_{W_0^{-1,2}}\|u\|_{W^{1,2}} + C(M,\mu)\,\|u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Aber es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2}^2 \quad &\leq \quad \sup\{\int_\Omega uv : v \in W_0^{1,2}(\Omega), \|v\|_{W^{1,2}} \leq \|u\|_{W^{1,2}}\} \\ &= \quad \|u\|_{W_0^{-1,2}}\,\|u\|_{W^{1,2}}. \end{aligned}$$

Durch Kürzen von $\|u\|_{W^{1,2}}$ folgt die Behauptung. $\square$

3 Ein Spektralsatz für symmetrische Operatoren

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und

$$Lu = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu,$$

wobei folgende Voraussetzungen gelten:

(E) $a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \mu|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n (\mu > 0)$
(B) $\|q\|_{L^\infty} \leq M$
(S) $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$ (Symmetrie)

Wir definieren

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_\Omega (a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\, \partial_\beta v + quv) \\ Q(u) &= B(u,u) = \int_\Omega (a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\, \partial_\beta u + qu^2). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für Eigenfunktionen, das heißt Lösungen der Gleichung

$$Lu = \lambda u, \quad \|u\|_{L^2} = 1.$$

Um die Randbedingungen zu formulieren, wähle abgeschlossenen Unterraum $V \subset W^{1,2}(\Omega)$ und betrachte L als Operator

$$L : V \to V', \quad Lu(v) = B(u,v).$$

Die schwache Formulierung des Eigenwertproblems lautet dann

$$Lu = \lambda u \quad \text{in } V' \Leftrightarrow B(u,v) = \lambda\langle u,v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in V. \tag{3.8}$$

Beispiel 3.1 *Dirichletproblem :* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega (a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\, \partial_\beta v + quv) = \lambda \int uv \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Bei formaler partieller Integration bedeutet das

$$\begin{aligned} -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu &= \lambda u \quad \textit{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Beispiel 3.2 *Neumannproblem :* $u \in W^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega (a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u\, \partial_\beta v + quv) = \lambda \int_\Omega uv \quad \forall v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Bei formaler partieller Integration bedeutet das

$$\begin{aligned} -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu &= \lambda u \quad \textit{in } \Omega \\ a^{\alpha\beta}(\partial_\alpha u)\nu^\beta &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(Wähle erst $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, dann $v \in W^{1,2}(\Omega)$)

Definition 3.1 *Der Hilbertraum X heißt Hilbertsumme der abgeschlossenen Unterräume E_j ($j \in J$), falls gilt:*

(1) $E_i \perp E_j$ *für* $i \neq j$

(2) $\bigoplus_{j \in J} E_j$ *ist dicht in* X.

Lemma 3.1 *Seien E_j, $j \in \mathbb{N}_0$, abgeschlossene, paarweise orthogonale Unterräume des Hilbertraums X, mit zugehörigen Orthogonalprojektionen P_j. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $X \perp E_j$ *für alle* $j \quad \Rightarrow \quad x = 0$ *(Maximalität)*

(2) X *ist Hilbertsumme der* E_j

(3) $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$ *für alle* $x \in X$ *(Vollständigkeit)*

(4) $\|x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j x\|^2$ *für alle* x *(Parsival-Gleichung).*

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Setze $E = \overline{\bigoplus_{j=0}^{\infty} E_j}$.
Nach (1) ist $E^{\perp} = \{0\}$, also nach dem Projektionssatz $X = E$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $y \in \bigoplus_{j=1}^{N} E_j$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|x-y\|^2 &= \| \underbrace{x - \sum_{j=1}^{N} P_j x}_{\perp E_j \text{ für } 1 \leq j \leq N} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} P_j x - y}_{\in \bigoplus_{j=1}^{N} E_j} \|^2 \\
&= \|x - \sum_{j=1}^{N} P_j x\|^2 + \underbrace{\|\sum_{j=1}^{N} P_j x - y\|^2}_{\geq 0} \\
\Rightarrow \quad &= \|x - \sum_{j=1}^{N} P_j x\| = \operatorname{dist}(x, \bigoplus_{j=1}^{N} E_j) \to 0 \text{ mit } N \to \infty.
\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (4): Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, x \rangle &= \lim_{k,l \to \infty} \langle \sum_{i=1}^{k} P_i x, \sum_{j=1}^{l} P_j x \rangle \\
&= \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \|P_i x\|^2.
\end{aligned}$$

(4) $\Rightarrow$ (1): $x \perp E_j$ für alle $j \quad \Rightarrow \quad P_j x = 0 \quad \forall j \quad \overset{(4)}{\Rightarrow} \quad x = 0.$ $\square$

Bemerkung. Im Spezialfall $\dim E_j = 1$, $E_j = \operatorname{Span}?\{e_j\}$, mit $\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}$ lauten die Aussagen:

(1) $\{e_j\}$ ist maximales ON-System.

(2) Endliche Linearkombinationen der e_j sind dicht

(3) $x = \sum_{j=0}^{\infty} \langle x, e_j \rangle \, e_j$ (Fourierentwicklung)

(4) $\|x\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\langle x, e_j \rangle|^2$ (Parsevalsche Gleichung).

Satz 3.1 (Spektralsatz) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt mit C^1-Rand, und $Lu = -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu$ symmetrischer, elliptischer Operator mit beschränkten Koeffizienten. Sei $W_0^{1,2}(\Omega) \subset V \subset W^{1,2}(\Omega)$ abgeschlossener Unterraum. Dann gibt es eine Folge $\lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \ldots$ von Eigenwerten mit zugehörigem $L^2(\Omega)$-Orthonormalsystem $v_k \in V$ von Eigenfunktionen, so dass gilt:*

(1) *Der Eigenraum $E_\lambda(L) = \{u \in V : Lu = \lambda u\}$ wird durch die v_k mit $\lambda_k = \lambda$ aufgespannt.*

(2) $\dim E_\lambda(L) < \infty$ *und* $\lambda_k \nearrow \infty$ *mit* $k \to \infty$

(3) *$L^2(\Omega)$ ist Hilbertsumme des $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.*

Beweis:
Schritt 1 *Konstruktion der Eigenwerte-und-Funktionen*
Sei $V_0 = \{0\}$ sowie induktiv für $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \inf\{Q(v) : u \in V, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1, u \perp_{L^2} V_{k-1}\} \\ v_k &= \text{zugehörige Minimalstelle von } Q \\ V_k &= V_{k-1} \oplus \{v_k\}. \end{aligned}$$

Wir erhalten v_k wie folgt: zunächst gilt für $u \in V$

$$\begin{aligned} \|Du\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{\mu} \int a^{\alpha\beta} \partial_\alpha u \, \partial_\beta u \\ &\leq \frac{1}{\mu} \big(B(u,u) + M\|u\|_{L^2}^2\big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Also folgt $\lambda_1 \geq -M$ und trivialerweise $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ Wähle Folge $u_j \in V$ mit $u_j \perp V_{k-1}$, $\|u_j\|_{L^2} = 1$, und

$$\begin{aligned} &Q(u_j) \to \lambda_k \\ \Rightarrow &\|Du_j\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\mu}\big(Q(u_j) + M\big) \to \frac{1}{\mu}(\lambda_k + M) < \infty \end{aligned}$$

Nach Rellich erhalten wir eine Teilfolge mit folgenden Eigenschaften:

- $u_j \to u$ in $L^2(\Omega)$, insbesondere $\|u_j\|_{L^2} = 1$, $u_j \perp_{L^2} V_{k-1}$
- $u_j \to u$ schwach in $W^{1,2}(\Omega)$, insbesondere $u \in V$
  (V abgeschlossen $\overset{\text{Satz 8.5??}}{\Rightarrow}$ V schwach abgeschlossen)

- $Du_j \to Du$ schwach in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_\Omega a(Du, Du) - \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega a(Du_j, Du_j) \\ = \ & \liminf_{j\to\infty} \Big(-2 \underbrace{\int_\Omega a\big(Du, D(u_j - u)\big)}_{\to 0} - \underbrace{\int_\Omega a\big(D(v_j - v), D(u_j - u)\big)}_{\geq 0} \Big) \leq 0 \\ \Rightarrow \lambda_k \ \leq \ & Q(u) \leq \liminf_{j\to\infty} Q(u_j) = \lambda_k, \end{aligned}$$

da $\|u\|_{L^2} = 1$, $u \perp V_{k-1}$, $u \in V$. Also ist $v_k := u$ die gesuchte Minimalstelle, und wegen $\dim V = \infty$ bricht die Induktion nicht ab.

Schritt 2 *Nachweis der Eigenfunktionsgleichung*
Sei $v \perp_{L^2} V_k$, $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Dann gilt

$$0 = \frac{d}{dt} Q\big((\cos t)v_k + (\sin t)v\big)|_{t=0} = 2B(v_k, v).$$

Aus der Symmetrie folgt weiter für $1 \leq j \leq k-1$

$$\begin{aligned} B(v_k, v_j) &= B(v_j, v_k) = 0 \quad \text{(Induktion)} \\ \Rightarrow B(v_k, v) &= \Lambda_k \langle v_k, v\rangle_{L^2} \quad \forall v \in V \supset W_0^{1,2}(\Omega) \\ \Rightarrow Lv_k &= \lambda_k v_k. \end{aligned}$$

Schritt 3 *Verhalten der Eigenwerte, Vollständigkeit*
Wir zeigen zunächst $\lambda_k \to \infty$ für $k \to \infty$. Wäre $\lambda_k \leq \Lambda < \infty$, so folgt aus (*)

$$\|Dv_k\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\mu} / \underbrace{Q(v_k)}_{=\lambda_k} + M) \leq \frac{1}{\mu}(\Lambda + M).$$

Nach Rellich gibt es eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ konvergiert. Aber

$$\|v_k - v_l\|^2 = 2 \quad \text{für } k \neq l, \text{ Widerspruch.}$$

Somit gilt $\lambda_k \nearrow \infty$. Wir zeigen nun

$$u_N = \sum_{k=1}^N \langle u, v_k\rangle v_k \to u \quad \text{in } L^2(\Omega), \text{ für alle } u \in V. \tag{3.10}$$

Da $V \supset W_0^{1,2}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$, folgt hieraus die Vollständigkeit der Eigenfunktionen. Nach der Besselschen Ungleichung gilt

$$\|u_N\|_{L^2}^2 \leq \sum_{k=1}^\infty |\langle u, r_k\rangle|^2 \leq \|u\|_{L^2}^2 < \infty,$$

und damit $u_N \to u_0$ in $L^2(\Omega)$. Zu zeigen ist $u_0 = u$.

Nun gilt

$$\begin{aligned} B(u-u_N,u_N) &= \sum_{k=1}^{N}\langle u,v_k\rangle \underbrace{B(u,v_k)}_{\lambda_k\langle u,v_k\rangle_{L^2}} - \sum_{k,l=1}^{N}\langle u,v_k\rangle\langle u,v_l\rangle \underbrace{B(v_k,v_l)}_{=\lambda_k\partial_{kl}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|Du_N\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{\mu}\big(B(u_N,u_N)+M\|u\|_{L^2}^2\big) \quad \text{(nach (3.9))} \\ &= \frac{1}{\mu}\big(B(u,u_N)+M\|u\|_{L^2}^2\big) \\ &\leq \frac{1}{\mu}\big(\|Lu\|_{V'}, \|u_N\|_{W^{1,2}}+M\|u\|_{L^2}^2\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\|Du_N\|_{L^2}^2 + c(\mu,M)\big(\|Lu\|_{V'}^2+\|u\|_{L^2}^2\big). \end{aligned}$$

Also ist u_n beschränkt in $W^{1,2}(\Omega)$, und konvergiert schwach gegen $u_0 \in V$. Aber

$$\langle u-u_0,v_k\rangle_{L^2(\Omega)} = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\langle u-u_n,v_k\rangle_{L^2(\Omega)}}_{=0 \text{ für } N\geq k} = 0 \quad \forall k\in N.$$

Nach Definition der λ_k folgt nun, da $u-u_0 \in V$

$$\|u-u_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_k} Q(u-u_0) \to 0 \text{ mit } k\to\infty.$$

Damit ist (3.10), und damit die $L^2(\Omega)$-Vollständigkeit der Eigenfunktionen, bewiesen. Wir zeigen schließlich, dass alle Eigenfunktionen bestimmt sind. Zunächst stehen Eigenfunktionen $u,v\in V$ zu verschiedenen Eigenwerten λ,μ aufeinander senkrecht:

$$\begin{aligned} (\lambda-\mu)\langle u,v\rangle_{L^2} &= \langle Lu,v\rangle_{L^2} - \langle u,Lv\rangle_{L^2} \\ &= B(u,v)-B(v,u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sei u irgendeine Eigenfunktion zum Eigenwert λ und $V_\lambda = \{v_k : \lambda_k = \lambda\}$. Wäre $u \in V_\lambda$, so hätten wir oBdA $u \perp_{L^2} V_\lambda$ und damit $u \perp V_k$ für alle k, also

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{\lambda_k} Q(u) \to 0 \text{ mit } k\to\infty.$$

□

Wir wollen nach der Verbindung zum Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren erläutern. Sei L wie in Satz 3.1,

$$Lu = -\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) + qu \text{ mit } q \geq \mu.$$

Dann ist L invertierbar, denn

$$\|Lu\|_{V'}\,\|u\|_{W^{1,2}} \geq Lu(u) \geq \mu\,\|u\|_{W^{1,2}}^2.$$

Betrachte die Einbettungen

$$\begin{array}{ll} E : V \subset L^2(\Omega), & Ev = v \\ E' : L^2(\Omega) \subset V', & E'u(v) = \int_\Omega fv \quad \forall v \in V \end{array}$$

und um den *Greenschen Operator*:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \xrightarrow{G} & L^2(\Omega) \\ E' \big\downarrow & & \big\uparrow E \\ V' & \xrightarrow{L^{-1}} & V \end{array}$$

$G = Gf \in V$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$Lv = f \Leftrightarrow Lv(u) = \langle f, u \rangle \quad \forall u \in V.$$

G ist symmetrisch auf $L^2(\Omega)$: sei $v_i = Gf_i \quad (i = 1, 2)$

$$\langle Gf_1, f_2 \rangle_{L^2} = Lv_2(v_1) = B(v_1, v_2) = \langle f_1, Gf_2 \rangle_{L^2}.$$

G ist kompakter Operator, auf diesen kann der allgemeine Spektralsatz für kompakte, symmetrische Operatoren angewandt werden.

(1) Seien $v \in V \backslash \{u?\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, Lösung von $Lv = \lambda$

$$\begin{array}{rcl} Lv & = & \lambda v \quad \text{in } V' \\ \Rightarrow \lambda \|v\|_{L^2}^2 & = & Lv(v) = B(v, v) \geq \mu \|v\|_{W^{1,2}}^2. \end{array}$$

Also folgt $\lambda > 0$, und

$$L\left(\frac{1}{\lambda} v\right) = v \Rightarrow Gv = \frac{1}{\lambda} v$$

(2)

$$\begin{array}{rcl} Gv = \mu v & \Rightarrow & L(\mu v) = v \\ & \Rightarrow & \mu \neq 0, \quad v \in V \text{ und } Lv = \frac{1}{\mu} v \\ & \overset{(1)}{\Rightarrow} & \mu > 0. \end{array}$$

L, G haben dieselben Eigenräume, Eigenwerte sind Kehrwerte.