Übungsaufgaben zur Mathematik I — WS 12/13, X-mas 2012
Prof. Dr. E. Kuwert — 20. Dezember 2012

Aufgabe 1 (*Extremwertaufgabe I*) (3 Punkte)
Bestimmen Sie zu gegebenem Umfang $L > 0$ ein bzw. das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt.

Aufgabe 2 (*Extremwertaufgabe II*) (3 Punkte)
Ein Mathematikerin steht an einem kreisrunden See im Punkt A und möchte zum gegenüberliegenden Punkt B. Sie will erst längs einer Sehne rudern, dann auf dem Kreisbogen den Rest laufen. Sie kann doppelt so schnell laufen wie rudern. Welchen Punkt muss sie zuerst ansteuern?

Aufgabe 3 *(exponentielles Wachstum)* (3 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$f' \leq \lambda f \text{ auf } (a,b) \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda x_2} f(x_2) \leq e^{-\lambda x_1} f(x_1).$$

Aufgabe 4 *(Maximumprinzip)* (3 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar auf (a,b). Falls $f'' \geq 0$, so gilt

$$\max f \leq \max\big(f(a), f(b)\big).$$

Hinweis: Beweisen Sie das erst unter der Voraussetzung $f'' \geq \varepsilon > 0$. Diese Zusatzannahme werden Sie wieder los, indem Sie dann $f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon x^2$ betrachten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 7.1.2013, vor der Vorlesung. Schöne Feiertage!