Übungsaufgaben zur Mathematik I — WS 12/13, Serie 10

Prof. Dr. E. Kuwert — 5. Januar 2013

Aufgabe 1 *(Kurvendiskussion)*
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x + \sin x$. Bestimmen Sie die Nullstellen, Minima und Maxima. Wo ist die Funktion wachsend bzw. fallend, wo ist sie konvex bzw. konkav? Skizzieren Sie den Graph der Funktion.

Aufgabe 2 (*Extremwertaufgabe*)
Ein durstiger Wanderer steht am Ufer eines Flusses der Breite b. An der anderen Uferseite genau gegenüber ist ein Wirtshaus. Der Fluss fließt mit Geschwindigkeit u, der Wanderer schwimmt mit Geschwindigkeit v und läuft mit Geschwindigkeit w. Wie kommt er am schnellsten zum Wirthaus?

Aufgabe 3 *(Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen)*
Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 4 *(Anfangswertproblem)*
Eine harmonische Schwingung ist dadurch charakterisiert, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung $x(t)$ ist. Mit Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ergibt sich die Differentialgleichung

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad \text{für } t \in \mathbb{R} \quad (\text{wobei } \omega \geq 0).$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung zu gegebenen Anfangswerten $x(0) = x_0$ und $x'(0) = v_0$ genau eine Lösung hat.
Hinweis. Betrachten Sie für die Eindeutigkeit die Energie $E(t) = x'(t)^2 + \omega^2 x(t)^2$.

Aufgabe 5 *(zur δ-Funktion)*
Sei $g \in C^0(\mathbb{R})$ nichtnegativ, $g(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx = 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C^0(\mathbb{R})$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) f(x)\, dx = f(0) \quad \text{wobei } g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Bemerkung. Es gibt aber kein $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx = f(0)$ für alle f.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 14.1.2013, vor der Vorlesung. Frohes neues Jahr!