Übungsaufgaben zur Mathematik I
Prof. Dr. E. Kuwert

WS 12/13, Serie 11
9. Januar 2013

Aufgabe 1 *(Flächeninhalt der Ellipse)*
Berechnen Sie den von einer Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$ eingeschlossenen Flächeninhalt, also den Flächeninhalt der Menge

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 2 *(Integrationsregeln)*
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t}$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\, dx$ $(a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\, dx.$

Aufgabe 3 *(Substitutionsregel/Partialbruchzerlegung)*
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$.

Aufgabe 4 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)*
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, und $b = b(t)$ sei differenzierbar auf (t_1, t_2). Wir betrachten für ein $a \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\phi : (t_1, t_2) \to \mathbb{R},\ \phi(t) = \int_a^{b(t)} f(x)\, dx.$$

Begründen Sie die Differenzierbarkeit von ϕ und berechnen Sie die Ableitung. Was ist wenn zusätzlich $a = a(t)$?

Aufgabe 5 *(Partielle Integration)*
Für stetige Funktionen $u, v : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\, dx \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie $\langle u_k, u_\ell \rangle$, $\langle v_k, v_\ell \rangle$ und $\langle u_k, v_\ell \rangle$ für $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \qquad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 21.1.2013, vor der Vorlesung.