Aufgabe 1 *(Uneigentliche Integrale)*
Zeigen Sie für $s > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}$ (mit Begründung der Konvergenz)

$$\int_0^\infty e^{-sx} \cos(\omega x)\, dx = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Aufgabe 2 *(Uneigentliche Integrale)*
Begründen Sie: das Integral

$$\int_2^\infty (\ln x)^\alpha \frac{1}{x}\, dx$$

konvergiert genau für $\alpha < -1$.

Aufgabe 3 *(Γ-Funktion)*
Betrachten Sie für $x > 0$ das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

(1) Zeigen Sie die Konvergenz des Integrals (Problemstellen sind bei $t = \infty$, sowie bei $t = 0$ wenn $0 < x < 1$.

(2) Zeigen Sie das Funktionalgesetz $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ durch partielle Integration.

(3) Folgern Sie $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4 *(Quotientenkriterium)*
Sei a_k eine Folge mit $a_k \neq 0$ für große k. Begründen Sie folgendes Kriterium zur Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^\infty a_k \text{ konvergiert absolut}$$
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=0}^\infty a_k \text{ divergiert.}$$

Schätzen Sie für die Konvergenz durch eine geometrische Reihe ab.
Hinweis. Die Bedingung $|a_{k+1}|/|a_k| < 1$ reicht nicht für die Konvergenz (Beispiel?).

Aufgabe 5 *(Zum Konvergenzradius)*
Bestimmen Sie für jede der folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (b) $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots$ (c) $1 + \dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,x^2 + \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,x^3 + \ldots$

Aufgabe 6 *(Konvergenz von Funktionen)*
Zeigen Sie, dass die Folge f_n punktweise gegen eine Funktion f konvergiert:

$$f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{nx}{1 + n|x|}.$$

Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 28.1.2013, vor der Vorlesung.