Aufgabe 1 *(Fehlerabschätzungen)*
Geben Sie Fehlerabschätzungen an für folgende Näherungen:

(a) $\sin x \approx x$ auf Intervallen $[0, k/4]$, mit $k = 1, 2, \dots, 6$

(b) $\ln(1 + x) \approx x$ auf Intervallen $[0, k/4]$ mit $k = 1, 2, \dots, 4$

Aufgabe 2 *(gewöhnliche Differentialgleichung)*
Sei $\omega \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie in $C^2(\mathbb{R})$ den Unterraum X aller Lösungen der Gleichung

$$f''(t) + \omega^2 f(t) = 0 \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass X von zwei Funktionen aufgespannt wird, und nicht von weniger als zwei Funktionen.

Aufgabe 3 *(Lösungen eines homogenen Systems)*
Bestimmen Sie, für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4
Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Raum der reellen $m \times n$-Matrizen

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \right\}.$$

Prüfen Sie, dass $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 04.02.2013, vor der Vorlesung.