Aufgabe 1 (*Intervallschachtelungen*) (3 Punkte)
Seien $I_n = [a_n, b_n]$ Intervalle mit $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ und $b_n - a_n \to 0$ mit $n \to \infty$.

(a) Begründen Sie, dass die Folgen a_n und b_n konvergieren und denselben Grenzwert $x \in \mathbb{R}$ haben.

(b) Zeigen Sie $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) *Eindeutigkeit:* ist $x' \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $x' = x$.

Aufgabe 2 (*Heronverfahren*) (3 Punkte)
Sei $a > 0$ gegeben. Wir wollen $\sqrt{a}$ als Nullstelle der Parabel $y = x^2 - a$ näherungsweise berechnen, und zwar so: ist $x_n > 0$ die n-te Näherung, so bestimme die Tangente im Punkt $(x_n, x_n^2 - a)$ und wähle x_{n+1} als deren Nullstelle. Als Startwert wählen wir ein $x_0 > \sqrt{a}$. Zeigen Sie:

(1) $x_{n+1} = f(x_n)$ mit $f(x) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big)$.

(2) $f(x) \geq \sqrt{a}$ für alle $x > 0$.

(3) $f(x) - x \leq 0$ für $x \geq \sqrt{a}$.

(4) $x_n \to \sqrt{a}$ mit $n \to \infty$.

(5) Wie oft muss man für $a = 3, 4, 5$ iterieren, damit x_n auf 6 Stellen genau ist?

Aufgabe 3 (*Eigenschaften der Exponentialfunktion*) (3 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) $x^{-n} e^x \to +\infty$ für $x \to +\infty$

(b) $x^n e^x \to 0$ für $x \to -\infty$.

(c) $e^x > 1$ für $x > 0$ und $0 < e^x < 1$ für $x < 0$.

(d) e^x ist streng monoton wachsend.

Aufgabe 4 (*Kreditformel*) (3 Punkte)
Durch Grenzübergang soll der Stand eines Kreditkontos zur Zeit $t \geq 0$ berechnet werden, und zwar bei kontinuierlicher Verzinsung und Tilgung. Grundlage ist, dass

die finanzielle Belastung pro Zeiteinheit konstant bleibt. Mit dem jährlichen Zinssatz p und der jährlichen Anfangstilgungsrate r ist die Belastung pro Jahr

$$B = S_0\,(p + r) \quad S_0 = (\text{Höhe des Kredits}). \tag{1}$$

Sei S_k der Kontostand zur Zeit $t_k = \frac{k}{n}\,t$ für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Begründen Sie

$$S_k = S_0 \left[1 + \frac{r}{p}\left(1 - \left(1 + \frac{pt}{n}\right)^k\right)\right] \tag{2}$$

und schließen Sie durch Grenzübergang

$$S(t) = S_0 \left[1 + \frac{r}{p}\big(1 - e^{pt}\big)\right]. \tag{3}$$

Ermitteln Sie hieraus Laufzeit und Kosten des Kredits und berechnen Sie zum Beispiel für $p = 0,06$, $r = 0,01$ und $r = 0,02$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 17.12.2012, vor der Vorlesung