Übungsaufgaben zur Mathematik I — WS 12/13, Serie 9
Prof. Dr. E. Kuwert — 18. Dezember 2012

Aufgabe 1 (*Hyperbolische Funktionen*) (3 Punkte)
Die Funktionen $\cosh, \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass sinh eine Umkehrfunktion $\mathrm{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat (lies: *area sinus hyperbolicus*). Zeigen Sie weiter

$$\mathrm{Arsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Hinweis. Zeigen Sie $\sinh' = \cosh$ und $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

Aufgabe 2 *(Differentiationsregeln)* (3 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen (mit Angabe des Definitionsbereichs):

(a) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^x$.

Aufgabe 3 *(Schrankensatz)* (3 Punkte)
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf (a,b), so gilt für $a \leq x_1 < x_2 \leq b$:

$$f'(x) \geq m \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq m$$
$$f'(x) \leq M \text{ für alle } x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M.$$

Beweis?

Aufgabe 4 (*Ein Balance-Akt*) (3 Punkte)
Eine Eisenbahn fährt von Freiburg nach Paris. Mit einem Scharniergelenk ist ein Stab reibungsfrei beweglich auf einem Wagen befestigt; er kann alle Positionen zwischen Fahrtrichtung ($\alpha = 0$) und Gegenfahrtrichtung ($\alpha = \pi$) annehmen. Für jede Wahl einer Anfangslage α_0 wird die Bewegung des Stabes durch eine Funktion $\alpha = \varphi(\alpha_0, t)$ beschrieben, dabei ist $t \in [0, T]$ die Zeit. Folgende Hypothesen sollen gelten:

- Falls der Stab zu einer Zeit t_0 liegt (also $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$), so ändert sich daran nichts mehr für alle $t \geq t_0$.

- Die Funktion $\varphi(\alpha_0, t)$ hängt stetig von α_0 und t ab.

Behauptung: Durch geeignete Wahl der Anfangsstellung in Freiburg kann man erreichen, dass der Stab bis Paris nicht hinfällt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 7.1.2013, vor der Vorlesung. Schöne Feiertage!