Probeklausur zur Analysis I — WS 11/12
Prof. Dr. G. Wang — 13.2.2011
Dr. A. Magni

Beginn: 8:15 Uhr — Ende:

Name: .... Vorname: ....

Matr.Nr.: .... Studiengang: ....

Geburtsort: .... Geburtstag: ....

Studiengang: .... Semesterzahl: ....

Bitte Beachten Sie folgende Hinweise:

- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit stichwortartig Ihre Schritte.

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, b) $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.

L: a) Mit Teleskopsummentrick gilt

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

b) Sei $f(x) = 2^x = \exp(x \log 2)$. f is differenzierbar mit $f'(x) = 2^x \log 2$. Bei der Definition von der Ableitung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = f'(0) = \log 2.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\sqrt[k]{3} - 1).$$

L: Sei $a_k = \sqrt[k]{3} - 1$. Die Folge $\{a_k\}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Nach Leibniz konvergiert die alternative Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{3} - 1)$.
Wir behaupten, dass *die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{3} - 1)$ *nicht konvergent ist.* Um die Behauptung zu zeigen, vergleichen wir sie mit der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, die nicht konvergent ist:
Aus $\lim_{k\to\infty}(1 + \frac{1}{k})^k = e < 3$ gilt

$$(1 + \frac{1}{k})^k < 3 \Leftrightarrow a_k > \frac{1}{k}$$

für k hinreichend groß. Also die Reihe $\sum(-1)^k(\sqrt[k]{3} - 1)$ ist nicht absolut konvergent.

Bemerkung: Man kann auch die folgende Behauptung benutzen: *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}$ *mit* $\lim_{k\to\infty} ka_k = a > 0$ *ist nicht konvergent.*

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

a) Zeigen Sie mittles vollständiger Induktion, dass $0 < a_n \leq 2$.
b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.
c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

L: a) und b) sind leicht zu zeigen. Nach a) und b) ist die Folge monoton und beschränkt. Nach der Vorlesung konvergiert die Folge gegen eine Zahl $a \in [0, 2]$. Mit der Rechnungsregeln von Grenzwert folgt aus $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$

$$a^2 = 2 + a,$$

die zwei Lösungen, $a = 2$ und $a = -1$, hat. Die Lösung $a = -1$ ist keine Lösung, da sie nicht im Intervall $[0, 2]$ liegt. Also folgt $a = 2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 2$ und fertigen Sie eine Skizze an.

L: In den Polarkoordinaten hat die Gleichung $z^5 = 2$ die folgende Form

$$z^5 = r^5 e^{i5\theta} = 2.$$

Also gilt $r = \sqrt[5]{2}$ und $\theta = 2k\pi/5$ für $k \in \mathbb{Z}$. Wir haben 5 Lösungen, da $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$z_k = \sqrt[5]{2} e^{i2k\pi/5} \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr sind, jeweils mit Begründung:

(a) M ist beschränkt.
(b) M ist offen.
(c) M ist abgeschlossen.

L: (a) M ist beschränkt, da $|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$.
(b) M ist nicht offen, da es keine Umgebung U von $(0,0) \in M$ mit $U \subset M$ gibt.
(c) M ist nicht abgeschlossen, da eine Folge $a_n = (0, 1-\frac{1}{n}) \in M$ existiert , die konvergiert, aber der Grenzwert $(0,1) = \lim_{n\to\infty} a_n$ nicht in M liegt.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgener Potenzreihen mit kürzer Begründung

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^k z^n, a, b > 0, k \in \mathbb{N}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^n$.

L: (a) Für $z \neq 0$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{a^{n+1}b^k|z|^{n+1}}{a^n b^k |z|^n} = a|z|.$$

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe für $|z| < \frac{1}{a}$ und divergiert für $|z| > \frac{1}{a}$, d.h., der Konvergenzradius is $R = \frac{1}{a}$.
(b) $R = \infty$. Denn für jedes festes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq \frac{1}{2^{2n}}|z| < 1/2 < 1, \quad \text{für } n \text{ hinreichend groß}$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

L: Die extremstellen erfüllen die notwendige Bedingung

$$0 = f'(x) = x^2(3-2x^2)e^{-x^2}.$$

Die Gleichung hat 3 Lösungen

$$x_0 = 0, \quad x_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Nach der Produktregeln gilt

$$f''(x) = e^{-x^2}\{-2x^3(3-2x^2) + 2x(3-2x^2) - 4x^3\}.$$

Daraus folgt

$$f''(x_+) < 0, \quad f''(x_-) > 0, \quad f''(x_0) = 0.$$

Nach der Vorlesung wissen wir, dass x_+ ein lokales Maximum und x_- ein lokales Minimum ist.

Aber x_0 ist keine lokale Extremstelle, denn

$$f(x) > f(x_0) = 0 \text{ für } x > 0, \quad f(x) < f(x_0) = 0 \text{ für } x < 0.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Wir definieren die Funktion cosh (*Cosinus hyperbolicus*) durch

$$\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty),\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arcosh (*Area Cosinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\mathrm{Arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ $(y \in [1, \infty))$ her.

L: Aus

$$\cosh' x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

gilt $\cosh' x > 0$ für $x \in (0, \infty)$, da $e^x > 1 > e^{-x}$ für $x \in (0, \infty)$. Also ist cosh monoton wachsend auf $(0, \infty)$ mit $\cosh 0 = 1$. Da $e^x \to \infty$ mit $x \to \infty$, gilt auch $\cosh x \to \infty$ mit $x \to \infty$. Da cosh stetig ist, ist $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ nach dem Zwischenwertsatz surjektiv. Also existiert für $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ eine Umkehrfunktion $\mathrm{Arcosh}(y)$.

Die Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Setzen $u = e^x$. Dann bekommen wir die Gleichung

$$u^2 - 2yu + 1 = 0,$$

die zwei Lösungen

$$u_+ = y + \sqrt{y^2 - 1}, \quad u_- = y - \sqrt{y^2 - 1}$$

hat. u_- ist keine Lösung. Wir haben

$$x = \log u = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x \log x dx.$ $\quad$ (b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\, dx \quad (a > 1).$ $\quad$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2 - x^2} dx.$

L: (a) Nach der partiellen Integration gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x \log x dx &= [\frac{1}{2}x^2 \log x]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} dx \\
&= 2\log 2 - \int_1^2 \frac{x}{2} dx \\
&= 2\log 2 - \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(b) Nach der Substitution $x = e^y$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_1^a \cos(\log x)dx &= \int_0^{\log a} e^y \cos y dy \\
&= [\cos y e^y]_{y=0}^{y=\log a} + \int_0^{\log a} e^y \sin y dy \\
&= [\cos y e^y]_{y=0}^{y=\log a} + [\sin y e^y]_{y=0}^{y=\log a} - \int_0^{\log a} e^y \cos y dy
\end{aligned}$$

wobei wir noch zweimal die partielle Integration benutzt haben. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int_1^a \cos(\log x)dx &= \int_0^{\log a} e^y \cos y dy = \frac{1}{2}([\cos y e^y]_{y=0}^{y=\log a} + [\sin y e^y]_{y=0}^{y=\log a}) \\
&= \frac{1}{2}(a\cos(\log a) + a\sin(\log a) - 1). \qquad \text{(Es gab ein Fehler hier!!!)}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{2-x}dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-x} + \frac{1}{\sqrt{2}+x}\right)dx \qquad \text{(Es gab ein Fehler hier!!!)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \left(\log\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right)' dx \qquad \text{(Es gab ein Fehler hier!!!)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:

$f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

L: f_n ist gleichmäßig konvergent, da gilt

$$\|f_n\|_I = \sup_{x\in I}|f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0, \text{ mit } n \to \infty.$$

Die Ableitung (f_n') ist nicht gleichmäßig konvergent, da gilt

$$\|f_n'\|_I = \sup_{x\in I}|f_n'(x)| = \sup_{x\in I}|\sin(nx)| = 1.$$

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?

L: Aus der Voraussetzung haben wir:
(1) Die Folge ist beschränkt, d.h, es existiert $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$.
(2) Für bliebige $\epsilon > 0$ existiert N_0 mit $|a_n - a| < \epsilon/2$, für alle $n \leq N_1$. Wähle N_2 mit

$$\frac{2MN_1}{N_2} < \epsilon/2.$$

Setze $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$. Es folgt für $n > N_0$

$$\begin{aligned}
|A_n - a| &= \frac{1}{n}|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)| \\
&\leq \frac{1}{n}\left(|(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots (a_{N_1} - a)| + |(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)|\right) \\
&< \frac{2MN_1}{n} + \epsilon/2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

Also die Folge A_n konvergiert gegen a.

Die Umkehrung ist falsch. Sei $a_n = (-1)^n$. Die Folge konvergiert nicht, aber A_n ist die Nullfolge

$$|A_n| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$