Probeklausur zur Analysis I — WS 11/12
Prof. Dr. G. Wang — 13.2.2011
Dr. A. Magni

Beginn: 8:15 Uhr — Ende:

Name: . . . . Vorname: . . . .

Matr.Nr.: . . . . Studiengang: . . . .

Geburtsort: . . . . Geburtstag: . . . .

Studiengang: . . . . Semesterzahl: . . . .

Bitte Beachten Sie folgende Hinweise:

- Resultate aus der Vorlesung dürfen Sie als bekannt voraussetzen. Begründen Sie nach Möglichkeit stichwortartig Ihre Schritte.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Folgen für $n \to \infty$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit kurzer Begründung).

a) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, b) $a_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und absolute Konvergenz

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (\sqrt[k]{3} - 1).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

a) Zeigen Sie mittles vollständiger Induktion, dass $0 < a_n \leq 2$.
b) Zeigen Sie, dass die Folge monoton ist.
c) Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^5 = 2$ und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Betrachten Sie die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y \geq 0\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen war sind, jeweils mit Begrüngdung:
(a) M ist beschränkt.
(b) M ist offen.
(c) M ist abgeschlossen.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgener Potenreihen mit kürzer Begrüdnung

a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n b^k z^n, a, b > 0, k \in \mathbb{N}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n^2}} z^n$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 e^{-x^2}.$$

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Wir definieren die Funktion cosh (*Cosinus hyperbolicus*) durch

$$\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty),\ \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Begründen Sie, dass $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit Arcosh (*Area Cosinus hyperbolicus*) bezeichnet. Leiten Sie die Formel $\operatorname{Arcosh}(y) = \log(y + \sqrt{y^2 - 1})$ $(y \in [1,\infty))$ her.

Aufgabe 9 (6 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x \log x dx.$ (b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\, dx \quad (a > 1).$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2 - x^2} dx.$

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:
$f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ auf $I = [-\pi, \pi]$,

Aufgabe 11 (6 Punkte)
Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Folge $A_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ der arithmetischen Mittelwerte der ersten n Folgenglieder. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} A_n = a.$$

Gilt die Umkehrung dieses Schlusses?