Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 9.1.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Tangens und Cotangenz)* (4 Punkte)
Wir definieren die Funktionen tan (*Tangens*) und cot (*Cotangens*) durch

$$\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan = \frac{\sin x}{\cos x},$$
$$\cot : \mathbb{R}\backslash\{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

a) Skizzieren Sie die Grahpen der Funktionen $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$.
b) Begründen Sie, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (*Arcus Tangens*) bezeichnet. Entsprechend hat $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion; diese wird mit $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ (*Arcus Cotangens*) bezeichnet.

Aufgabe 2 *(Polarkoordinaten)* (4 Punkte)
Rechnen Sie für $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Gleichung $z = re^{i\vartheta}$ nach, wenn r und ϑ wie folgt definiert sind:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \begin{cases} \arccos(x/r) & \text{für } y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(x/r) & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie die Zahlen -3, $4i$, $-5i$, $-e^{2i}$, $i\,e^{it} (t \in \mathbb{R})$, $1 + i$, $-1 - i$ und $(1 + i)^{2012}$ in der Form $re^{i\vartheta}$.

Aufgabe 3 *(Definition der Ableitung)* (4 Punkte)
Sei $g : (-a, a) \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (-a, a) \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^{1+\alpha}\, g(x)$$

im Punkt $x = 0$ die Ableitung $f'(0) = 0$ hat, falls $\alpha > 0$ ist.

Aufgabe 4 *(Differentiationsregeln)* (4 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen (mit Angabe des Definitionsbereichs):

(a) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(b) $f(x) = x^\alpha \log(x)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \operatorname{Arsinh}(x)$ (Umkehrfunktion von sinh vgl. Aufgabe 3, Serie 9)).

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 16.1.12 bis 12:00**.