Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang — 16.1.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Kettenregel)* (4 Punkte)
Differenzieren Sie die beiden Funktionen $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$:

(a) $f(x) = x^{(x^x)}$
(b) $f(x) = (x^x)^x$.

Aufgabe 2 *(Die Tangensfunktion und Ihre Umkehrfunktion)* (4 Punkte)
Die Funktion $\tan : \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$, $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$, heißt Tangens. Zeigen Sie:
a) $\tan(t + \pi) = \tan t \quad$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
b) Die Umkehrfunktion $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (vgl. Aufgabe 1 in Serie 10.) ist differenzierbar und $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Aufgabe 3 *(Definition der Ableitung)* (4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 4*(Hebbarer Punkt für f')* (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in I$ stetig, auf $I\backslash\{x_0\}$ differenzierbar und es gelte $\lim_{x\to x_0} f'(x) = a$. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz $f'(x_0) = a$.

Aufgabe 5 *(Maximumprinzip)* (4 Punkte)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal differenzierbar auf (a, b). Falls $f'' \geq 0$, so gilt $\sup f \leq \max\{f(a), f(b)\}$.
Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst unter der Voraussetzung $f'' \geq \varepsilon > 0$. Diese Zusatzannahme werden Sie wieder los, indem Sie $f + \varepsilon q$ mit einer geeigneten Hilfsfunktion q betrachten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.1.12 bis 12:00**.