Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I
Prof. Dr. G. Wang
Dr. A. Magni

WS 11/12, Serie 12
23.1.2012

Aufgabe 1 *(exponentielles Wachstum)* (4 Punkte)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$f' \geq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \geq e^{-\alpha x_1} f(x_1)$$
$$f' \leq \alpha f \text{ auf } (a,b) \quad \Rightarrow \quad e^{-\alpha x_2} f(x_2) \leq e^{-\alpha x_1} f(x_1).$$

Aufgabe 2 *(Die Regel von de l'Hospital)* (4 Punkte)
Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

$$a) \lim_{x\to 0} x \log x; \quad b) \lim_{x\to 0} x^x; \quad c) \lim_{x\to\infty} x(\frac{\pi}{2} - \arctan x); \quad d) \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Aufgabe 3 *(Berechnung des Integrals mit Riemannschen Summen)* (4 Punkte)
Berechnen Sie für $a > 1$ das Integral

$$\int_1^a \log x \, dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Unterteilungspunkte $x_k = a^{k/N}$ für $k = 0, 1, \ldots, N$.

Aufgabe 4 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)* (4 Punkte)

Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [a,b] \to \mathbb{R}, \; F(x) = \int_a^x f(\xi) \, d\xi$$

Lipschitzstetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 30.1.12 bis 12:00**.