Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 13
Prof. Dr. G. Wang — 30.1.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Gleichmäßige Konvergenz)* (4 Punkte)
Prüfen Sie auf gleichmäßige Konvergenz, sowie auf gleichmäßige Konvergenz der Ableitungsfunktionen:

(a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n} \quad \text{auf } I = [-\pi, \pi]$,

(b) $f_n(x) = n\,\log(1 + x/n) - x \quad \text{auf } I = [0, 100]$.

Aufgabe 2 *(Integralnorm)* (4 Punkte)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Beweisen Sie, dass durch

$$|| \cdot ||_1 : C^0(I) \to \mathbb{R},\ ||f||_1 = \int_a^b |f|$$

eine Norm definiert ist (also Positivität, Halblinearität und Dreiecksungleichung). Ist $|| \cdot ||_1$ auch eine Norm auf dem Raum $\mathcal{R}(I)$? ($C^0(I)$ ist die Menge der stetigen Funktionen auf I.)

Aufgabe 3 *(Partielle Integration)* (4 Punkte)
Bestätigen Sie durch vollständige Induktion die Formel

$$\int_0^1 x^k\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} \quad (n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \le k \le n).$$

Aufgabe 4 *(Substitutionsregel)* (4 Punkte)
Berechnen Sie dir folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{dt}{\sin t} \quad$ (Substitution $x = \tan \frac{t}{2}$).

(b) $\displaystyle\int_1^a \cos(\log x)\,dx \quad (a > 1)$.

(c) $\displaystyle\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 6.2.12 bis 12:00**.