Übungsaufgaben zur Vorlesung
Analysis I — WS 11/12, Serie 14
Prof. Dr. G. Wang — 6.2.2012
Dr. A. Magni

Aufgabe 1 *(Substitutionsregel)* (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + px + q},$$

mit einer Fallunterscheidung je nach Vorzeichen von $D = p^2 - 4q$, d.h., Sie bestimmen das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx.$$

Aufgabe 2 *(Integral als Funktion der oberen Grenze)* (4 Punkte)
Sei $f \in C^0(I)$ mit $I = (a, b)$ offen. Wir betrachten die Funktion

$$\Phi : I^* \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = \int_{a_0}^{b(t)} f(x)\, dx,$$

wobei $a_0 \in I$ und $b : I^* \to I$ differenzierbar ist. Begründen Sie die Differenzierbarkeit von Φ und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 3 *(Partielle Integration)* (4 Punkte)
Für $u, v \in C^0([-\pi, \pi]$ definieren wir $\langle u, v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} uv \in \mathbb{R}$. Überlegen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarprodukts besitzt (siehe Kapitel 1, Lemma 5.1). Berechnen Sie weiter die Skalarprodukte $\langle u_k, u_l\rangle$, $\langle v_k, v_l\rangle$ sowie $\langle u_k, v_l\rangle$ $(k, l \in \mathbb{Z})$ für

$$u_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos kx \quad \text{und} \quad v_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin kx \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 4 *(uneigentliches Integral)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

konvergent, aber nicht absolut konvergent ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.2.12 bis 12:00**.